I. L O G I K A M A T E M A T I K A

1. PENGANTAR

Kata "logika" sering muncul dalam pembicaraan sehari-hari, biasanya dalam arti "menurut akal", seperti pada kalimat : "Tindakan yang diambilnya itu logis" atau "Menurut logikanya ia harus marah". Akan tetapi logika sebagai istilah berarti suatu metoda atau teknik yang diciptakan untuk meneliti ketepatan penalaran.

Manusia mampu mengembangkan pengetahuan karena mempunyai bahasa dan kemampuan menalar. Dalam kehidupan sehari-hari kita sering dihadapkan kepada situasi yang mengharuskan kita membuat suatu keputusan. Sebelum membuat keputusan yang baik, kita harus dapat menarik konklusi dari situasi yang dihadapi. Penalaran merupakan suatu kemampuan untuk berpikir menurut suatu alur kerangka berpikir tertentu. Kemampuan menalar adalah suatu kemampuan untuk menarik konklusi yang tepat dari bukti-bukti yang ada dan berdasarkan aturan tertentu. Jadi penalaran adalah suatu bentuk pemikiran. Bentuk pemikiran yang paling sederhana adalah : pengertian atau konsep, proposisi atau pernyataan dan penalaran (reasoning). Tidak ada pernyataan tanpa pengertian dan tidak ada penalaran tanpa pernyataan. Ketiga komponen ini secara simultan membentuk proses pemikiran.

Dengan pengalaman indera atau observasi empirik : mata melihat anjing, melihat warna hitam, telinga mendengar suara menggonggong, maka sejalan dengan aktivitas indera ini terjadilah aktivitas pikiran yaitu pembentukan pengertian. Dalam hal ini yang terbentuk dalam pikiran ialah pengertian (konsep) "anjing", "hitam", dan konsep "menggonggong". Tepat tidaknya pengertian ini bergantung kepada tepat tidaknya cara melakukan observasi, dan ini adalah masalah fisik, masalah indera, bukan masalah pikiran. Sekali indera mengobservasi, terbentuklah pengertian yang bagi pikiran merupakan data dalam proses berpikir selanjutnya. Bersamaan dengan terjadinya observasi empirik, di dalam pikiran tidak hanya terbentuk pengertian, akan tetapi juga terjadi perangkaian dari pengertian-pengertian itu. Tidak pernah ada pengertian yang berdiri sendiri di dalam pikiran. Rangkaian pengertian itulah yang disebut proposisi atau pernyataan dan pengertian hanya terdapat pada pernyataan.

Dalam rangkaian pembentukan proposisi itu terjadi dua hal :
Pertama : proses pembentukan proposisi terjadi sedemikian rupa sehingga ada pengertian yang menerangkan tentang pengertian yang lain. Dengan menggunakan contoh tentang anjing tadi, proses perangkaian itu menghasilkan, misalnya, proposisi sebagai berikut : "Anjing hitam itu menggonggong". "Menggonggong" menerangkan tentang "anjing hitam". Pengertian yang menerangkan itu disebut predikat, sedang pengertian yang diterangkan disebut subyek.

Kalau dalam proses perangkaian itu terjadi pengingkaran, maka proposisi yang terbentuk menjadi : "Anjing hitam itu tidak menggonggong".
Kedua : dalam proses pembentukan proposisi itu sekaligus terjadi pengakuan bahwa memang benar anjing hitam itu menggonggong atau tidak menggonggong, kebalikannya adalah salah.

Proses berpikir dengan bertolak dari pengamatan indera menghasilkan sejumlah pengertian dan proposisi sekaligus. Berdasarkan pengamatan-pengamatan indera yang sejenis, pikiran menyusun proposisi-proposisi sejenis pula. Misalnya logam 1 dipanasi dan memuai, logam 2 dipanasi dan memuai, logam 3 dipanasi dan memuai dan seterusnya, misalkan sampai 10 jenis logam. Kalau orang yang mengamati itu sadar atas kesamaan di antara kesepuluh proposisi itu, ia akan mengharapkan bahwa logam-logam lainpun kalau dipanasi akan memuai.

Apa yang terjadi dalam proses di atas ialah, bahwa berdasarkan sejumlah proposisi yang diketahui atau dianggap benar, orang menyimpulkan suatu proposisi yang baru yang sebelumnya tidak diketahui. Proses inilah yang disebut penalaran. Kalau disusun secara formal bentuk penalaran di atas menjadi sebagai berikut :

Logam 1 dipanasi dan memuai
Logam 2 dipanasi dan memuai
Logam 3 . . .
.
.
Logam 10 dipanasi dan memuai
Jadi : Logam-logam lain (semua logam) yang dipanasi memuai.

Dalam penalaran ini proposisi-proposisi yang menjadi dasar penyimpulan disebut premis atau anteseden sedang kesimpulannya disebut konklusi atau konsekuen.

Kalau kita perhatikan penalaran di atas, jelas bahwa konklusinya lebih luas dari premisnya. Yang diketahui dalam premis hanya 10 jenis logam yang memuai, sedang konklusinya mengenai semua logam. Di sini terjadilah suatu generalisasi, konklusinya itu suatu proposisi umum, suatu proposisi universal, yang berlaku umum untuk segala benda logam.

Penalaran yang konklusinya lebih luas dari pada premisnya itu disebut penalaran induktif atau induksi. Tidak semua induksi konklusinya mesti suatu generalisasi, akan tetapi mesti lebih luas dari pada premisnya.

Di samping induksi ada penalaran deduktif atau deduksi. Di sini konklusinya tidak lebih luas dari premisnya. Di dalam deduksi, dalam premisnya mesti ada proposisi universal. Proposisi universal itu misalnya : "Semua benda yang dipanasi memuai". Kalau misalnya saya mengetahui ban mobil sesudah perjalanan itu panas maka saya tahu atau menyimpulkan bahwa ban mobil itu telah memuai. Ini suatu penalaran deduktif, yang kalau dissusun dalam bentuk formal menjadi :

Semua benda yang dipanasi memuai
Ban mobil itu dipanasi (dalam perjalanan)
Jadi : Ban mobil itu memuai

Dari pembicaraan di atas, secara lebih rinci dapat dikatakan bahwa logika merupakan teori berpikir atau ilmu yang mengkaji prinsip-prinsip penalaran yang benar dan penarikan kesimpulan yang absah, baik yang bersifat induktif maupun yang bersifat deduktif. Logika memandu kita tentang bagaimana pemikiran seharusnya berjalan, dan bukan bagaimana keadaan sebenarnya pemikiran manusia berjalan. Logika berusaha mengatur pikiran dalam batas-batas tertentu sehingga cara berpikir kita dapat diperbaiki dengan mempelajari logika.

Logika telah dipelajari sejak jaman Junani kuno. Aristoteles (384 - 3[illegible] SM) adalah seorang filosof Junani yang mengembangkan logika pada jaman itu. Logika pada jaman itu dikenal dengan sebutan Logika Tradisional.

Pada waktu itu digunakan istilah analitika untuk cara penalaran yang didasarkan pada pernyataan-pernyataan yang benar dan istilah dialektika untuk cara penalaran yang didasarkan atas dugaan. Dalam perkembangannya, kedua jenis penngetahuan yang mempelajari cara penalaran itu disebut logika. Pada umumnya logika dipandang sebagai cabang pengetahuan filsafat, yaitu ilmu tentang proses penalaran atau penyimpulan formal.

Di kemudian hari dengan dipelopori oleh Leibniz dan De Morgan timbul aliran yang sangat menekankan penggunaan bahasa simbol untuk mempelajari secara terinci bagaimana akal harus bekerja. Metode-metode dalam mengembangkan matematika banyak digunakan oleh aliran ini. Sehingga aliran ini berkembang sangat teknis dan ilmiah serta bercorak matematika, yang kemudian disebut LOGIKA MATEMATIKA.

G.W.Leibniz (1646 - 1716) dianggap sebagai matematikawan pertama mempelajari Logika Simbolik. Kemudian lebih banyak matematikawan yang mempelajarinya dari pada ahli filsafat. Hal ini terjadi karena para matematikawan menjadi lebih sadar terhadap kebutuhan untuk menguji dan mengkonstruksi kembali dasar-dasar matematika.

Pada abad kesembilan belas, George Boole (1815 - 1864) berhasil mengembangkan Logika Simbolik . Bukunya yang berjudul "Laws of Thought" mengembangkan logika sebagai sistem matematika yang abstrak. Dengan menggunakan ide-idenya itu, dia dapat membangun logika menjadi suatu aljabar khusus, yang sistemnya mengikuti hukum-hukum aritmetika. Demikianlah Logika Tradisional telah dikembangkan dengan menggunakan metode-metode matematika menjadi Logika Modern yang disebut juga Logika Simbolik. Logika Simbolik ini merupakan logika formal yang semata-mata menelaah bentuk dan bukan isi dari apa yang dibicarakan.

Karena akan dibahas banyak mengenai Logika Simbolik maka berikut ini diutarakan dua pendapat tentang Logika Simbolik yang merangkum semua maknanya.

1. Logika Simbolik adalah ilmu tentang penyimpulan yang sah (absah), khususnya yang dikembangkan dengan penggunaan metode-metode matematika dan dengan bantuan simbol-simbol khusus sehingga memungkinkan seseorang menghindarkan makna ganda dari bahasa sehari-hari (Frederick B. Fitch dalam bukunya "Symbolic Logic").
2. Pemakaian simbol-simbol matematika untuk mewakili bahasa. Simbol-simbol ini diolah sesuai dengan aturan-aturan matematika untuk menetapkan apakah suatu pernyataan atau serangkaian pernyataan bernilai benar atau salah.

Studi tentang logika terus berkembang dan sekarang logika menjadi ilmu pengetahuan yang luas dan yang cenderung mempunyai sifat teknis dan ilmiah. Aljabar Boole, adalah suatu topik yang merupakan perluasan logika (dan teori himpunan), sekarang ini digunakan secara luas dalam mendisain komputer. Penggunaan simbol-simbol Boole dapat mengurangi banyak kesalahan dalam penalaran.

Ketidak jelasan berbahasa dapat dihindari dengan menggunakan simbol-simbol, karena setelah masalah diterjemahkan ke dalam notasi simbolik, penyelesaiannya menjadi bersifat mekanis. Tokoh-tokoh terkenal lainnya yang menjadi pendukung perkembangan Logika Simbolik adalah De Morgan, Leonhard Euler (1707 - 1783), John Venn (1834 - 1923), Alfred North Whitehead dan Bertrand Russel (1872 - 1970).

Dalam Logika Kalimat (nama lain untuk Logika Simbolik), kalimat-kalimat dapat dihubungkan satu sama lain dengan menggunakan kata-kata perangkai (kata-kata perakit, kata-kata penghubung, kata-kata penggandeng, logical connectives) yaitu : DAN (konjungsi) ATAU (disjungsi), APABILA ..... MAKA (implikasi), BILAMANA DAN HANYA BILAMANA (bi-implikasi), dan TIDAKLAH (negasi). Akan tetapi dalam percakapan sehari-hari, pemakaiannya diwarnai dengan macam-macam konotasi dan arti sampingan, yang tidak sesuai dengan matematika sebagai ilmu yang eksak. Karena itu penggunaannya di dalam matematika ditertibkan. Hal ini dilaksanakan dalam logika kalimat dengan menggunakan tabel-tabel nilai.

2. SEMESTA PEMBICARAAN

Himpunan semua obyek yang dibentangkan dalam suatu pembicaraan disebut SEMESTA PEMBICARAAN atau HIMPUNAN SEMESTA. Dalam

bahasa asing disebut UNIVERSUM atau UNIVERSE OF DISCOURSE. Semesta pembicaraan dalam percakapan sehari-hari adalah alam semesta, di mana kita boleh membicarakan apa saja. Kita berbicara tentang orang-orang, tentang benda-benda langit, tumbuh-tumbuhan atau apapun juga. Dalam Astronomi umpamanya, pada prinsipnya kita hanya berbicara tentang benda-benda langit saja. Dalam Aritmetika tentang bilangan-bilangan. Dalam suatu pasal Ilmu Hitung, mungkin yang dibicarakan hanyalah bilangan-bilangan asli saja. Bahkan dalam suatu pembicaraan (soal) mungkin kita hanya dibicarakan bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, dan 5 saja.

Menentukan semestanya sebelum pembicaraan dimulai sangat penting dalam matematika. Sebab benar tidaknya suatu pernyataan bergantung pada semesta pembicaraannya yang disepakati. Misalnya kalimat : "Ada bilangan terbesar" mempunyai nilai benar jika semestanya terdiri atas bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4 dan 5 saja. Akan tetapi nilainya salah jika yang dibicarakan semua bilangan asli. Demikian juga pernyataan bahwa dua buah garis lurus pasti potong-memotong atau sejajar adalah benar jika semestanya bidang datar, akan tetapi bernilai salah jika semestanya ruang.

Kadang-kadang dari kalimatnya sendiri dapat diduga apa yang menjadi semestanya. Umpamanya dalam kalimat : "Tono adalah anggota terbesar", wajar menduga bahwa semestanya terdiri atas orang-orang dan bukan bilangan-bilangan. Walaupun demikian di dalam matematika elementer dan lebih-lebih dalam matematika lanjut, sangat diperlukan menyatakan semestanya secara eksplisit.

3. KALIMAT DEKLARATIF

Sifat-sifat dari, dan relasi-relasi yaitu hubungan di antara anggota-anggota dari semestanya dinyatakan dengan kalimat. Suatu kalimat yang mengandung nilai benar ataupun mengandung nilai salah disebut KALIMAT DEKLARATIF (PERNYATAAN). "Benar" di sini diartikan adanya persesuaian antara apa yang dinyatakan oleh kalimat itu dengan keadaan sesungguhnya. Perhatikan sekarang ungkapan-ungkapan di bawah ini :

1. Bilangan 5 adalah bilangan ganjil.
2. Perancis berpenduduk 1000 juta.
3. Bilangan π adalah bilangan rasional atau tidak rasional.
4. Tutuplah pintu itu.
5. Astaga.
6. Bilangan 100 mencintai bilangan 1000.
7. Semoga anda berhasil.
8. Apakah anda merasa puas ?

Kalimat 1 dan 2 adalah kalimat deklaratif. Yang pertama bernilai benar sedang yang kedua nilainya salah. Keduanya disebut FAKTUAL karena untuk menentukan nilainya orang harus memperhatikan fakta di luar bahasa yaitu dengan melakukan observasi. Benarnya kalimat pertama ditetapkan dengan melakukan observasi mental karena bilangan 5 adalah abstrak sehingga tidak dapat dilakukan observasi langsung (dengan indera) terhadapnya. Sedangkan salahnya kalimat kedua diketahui dengan observasi faktual (langsung), yaitu meninjau langsung atau melalui dokumen yang ada. Sebaliknya, kalimat 3, adalah independen (bebas) dari fakta dan hanya didasarkan kepada kesepakatan yang telah diadakan tentang arti kata "atau". Biarpun kita tidak mengetahui dengan tepat apakah π itu rasional atau tidak rasional, maka benarnya kalimat itu dapat ditetapkan dengan hanya melihat struktur kalimatnya. Terhadap bilangan tidak ada pilihan lain, selain dari bilangan rasional dan tidak rasional. Tidak ada pilihan ketiga (TERTIUM NON DATUR). Kalimat 4 adalah kalimat perintah sehingga tidak mempunyai nilai benar, salahpun tidak. Ungkapan 5 mempunyai arti tetapi bukan kalimat deklaratif dan tidak mempunyai strukturnya sebagai kalimat. Sebaliknya kalimat 6 walaupun 6 mempunyai struktur suatu kalimat, namun tidak mempunyai nilai benar. Salahpun tidak karena ingkarannyapun tidak benar. Hal ini disebabkan relasi "mencintai" antara bilangan-bilangan tidak ada. Ungkapan 6 ini adalah contoh suatu ungkapan yang walaupun mempumyai struktur suatu kalimat, namun tidak lai dari rangkaian kata-kata tanpa arti.
Kalimat 7 adalah suatu kalimat harapan sehingga tidak dapat ditentukan nilainya, jadi bukan kalimat deklaratif.

Kalimat 8 adalah kalimat tanya sehingga nilainta tidak dapat ditentukan.
Perhatikan kembali kalimat 3 yang nilainya ditetapkan berdasarkan struktur kalimatnya maka cara observasi yang dilakukan disebut observasi struktur.

L A T I H A N

1. Tentukan suatu semesta untuk mana persamaan $x^2 - 1 = 0$ mempunyai tepat satu penyelesaian.
2. Semesta adalah himpunan bilangan riel. Apakah kalimat : "Semua bilangan mempunyai kebalikan" bernilai benar ataukah salah ? Bagaimana dengan kalimat: "Semua bilangan mempunyai lawan?
3. Tentukan suatu semesta terdiri atas bilangan-bilangan alam di mana orang tidak tahu apakah semesta itu berhingga.

Tentukan apakah kalimat-kalimat di bawah ini kalimat deklaratif ataukah ungkapan yang mempunyai arti tetapi bukan kalimat deklaratif ataukah merupakan rangkaian kata-kata tanpa arti. Apabila deklaratif tentukan kalimatnya apakah mempunyai nilai benar atau salah.

4. Apakah Tono menderita sakit?
5. Penyakit Tono adalah kronis.
6. Tono mempunyai sifat kronis.
7. Tidak benar bahwa bilangan 2 adalah sekaligus prima dan tidak prima.
8. Mudah-mudahan anda lulus.
9. Tono adalah bilangan prim.
10. Ibarat pungguk merindukan bulan.
11. Tidak ada tripel bilangan alam x, y dan z yang memenuhi persamaan $x^n + y^n = z^n$ untuk $n \geqslant 3$.

4. KONSTAN NOMINAL, DENOTASI DAN DESIGNASI

Untuk menunjuk pada dan untuk dapat berbicara tentang suatu anggota tertentu dari semestanya, kita memerlukan suatu lambang dari anggota tersebut. Lambang sedemikian tidak lain adalah nama dari anggota tersebut. Demikianlah, jika kita mendiskusikan harimau maka kita tidak usah membawanya ke dalam ruangan pembicaraan, tetapi cukup dengan menggunakan namanya yang dapat diucapkan atau ditulis. Bayangkan kesulitannya jika untuk membicarakan harimau, setiap kali harus kita membawa harimau ke ruangan pembicaraan. Dalam bahasa matematika (mathematical jargon) lambang itu disebut KONSTAN NOMINAL atau disingkat KONSTAN.

Definisi : Lambang dari anggota tertentu dari semesta pembicaraan disebut KONSTAN.

Perhatikan bahwa harus dibedakan dengan tajam antara lambang dengan apa yang dilambangkan oleh lambang itu. Demikianlah harus dibedakan dengan tajam antara bilangan (number) dan angka atau rangkaian angka (numerals) sebagai lambamg dari padanya. Angka adalah unsur bahasa yang dapat diucapkan atau ditulis, sedangkan bilangan adalah unsur matematika yang berada di luar bahasa. Yang dijumlah atau digandakan adalah bilangan-bilangan sedangkan yang diucapkan atau ditulis adalah lambangnya, yaitu angka-angka. Ucapan "Tulislah bilangan 5 di papan tulis" adalah ucapan yang keliru. Tidak ada satu orang manusiapun yang dapat menunjukkan bilangan 5 karena memang bilangan 5 itu abstrak adanya. Mungkin orang akan bertanya apakah ada perlunya mengadakan perbedaan sedemikian, sebab, kita bisa berpendapat bahwa bahasa adalah alat komunikasi. Apakah tidak cukup jelas apa yang dimaksud dengan kalimat "Tulislah bilangan 5 di papan tulis" ? Jawabnya ialah bahwa di dalam matematika, fungsi bahasa tidaklah hanya sebagai alat komunikasi tetapi lebih-lebih sebagai alat berpikir (vehicle of thought). Selanjutnya memang ada cabang-cabang matematika, khususnya logika-matematika, di mana orang harus dengan amat tajam memperhatikan hal-hal di atas, karena melalaikannya akan membawa kita pada kesalahan-kesalahan serius.

Apa yang dilambangkan oleh suatu lambang disebut DENOTASI atau REFERENSI-OBJEKTIF dari lambang tersebut. Sedangkan lambangnya sendiri disebut DESIGNASI dari apa yang dilambangkan olehnya. Demikianlah, designasi dari seorang pemuda adalah namanya, sedangkan pemudanya sendiri adalah denotasi dari nama itu.

Kita juga akan membicarakan sifat-sifat dari anggota, maupun relasi antara para anggota, sehingga kita juga memerlukan lambang-lambang darinya yang dapat ditulis atau diucapkan.
Dalam logika matematika dan dalam matematika pada umumnya kita hanya membahas kalimat deklaratif. Sudah barang tentu, dalam suatu buku matematika terdapat juga pertanyaan-pertanyaan, perintah-perintah dan sebagainya. Tetapi pada prinsipnya suatu karya matematika dapat ditulis melulu dengan menggunakan kalimat-kalimat deklaratif, di samping kalimat terbuka yang akan dibicarakan di bawah ini. Logika kalimat adalah suatu teori tentang kalimat deklaratif (yang per definisi mempunyai nilai benar atau salah) dan di mana yang dibahas adalah nilai benar atau salahnya berbagai kombinasi kalimat-kalimat demikian.

Pertanyaan dapat timbul, apakah referensi objektif yaitu denotasinya suatu kalimat ?
Ambillah umpamanya kalimat

Pohon itu tinggi

Sebagian dari para logikawan sependapat dengan filosof-matematikawan RUSSEL bahwa denotasinya suatu kalimat adalah situasi, fakta atau kejadian ; Dengan kata lain denotasi suatu kalimat adalah apa yang ditangkap oleh pikiran kita apabila kita mengerti kalimat itu.

B. VARIABEL

Dalam matematika, konsep variabel adalah suatu konsep yang sangat penting. Untuk menghindari salah faham maka perlu ditekankan bahwa pengertian variabel yang dibicarakan di bawah ini ad lah konsep matematika dan logika. Mungkin saja pengertian variabel dalam bidang lain berbeda dari konsep di sini.

Andaikan himpunan S adalah semesta pembicaraan tertentu. Sering kita hendak berbicara tentang anggota sembarang dari semesta itu yang bukan anggota tertentu, melainkan suatu anggota yang tidak dispesifikkan dengan lengkap. Dalam bahasa alami (natural language) kita memang menjumpai keadaan seperti ini. Umpamanya kita hendak menyatakan bahwa siapa saja di antara para anggota suatu semesta yang terdiri atas orang-orang yang belajar di perguruan tinggi (jadi seorang anggota sembarang) harus rajin, maka digunakan kata "mahasiswa" dan diucapkan kalimat "Mahasiswa harus rajin". Hal seperti ini kita jumpai juga dalam matematika. Misalnya semestanya adalah himpunan bilangan asli. Maka akan digunakan tanda (lambang) tertentu (biasanya huruf "x", "y" dan seterusnya) untuk menunjuk pada (to refer to) suatu bilangan sembarang. Misalkan hendak dinyatakan bahwa kelipatan dua dari bilangan sembarang pastilah genap. Maka diucapkan kalimat "2x pastilah genap". Huruf-huruf "x", "y" dan seterusnya disebut VARIABEL. Tampak bahwa variabel (sebagaimana juga KONSTAN) adalah suatu lambang, namun sekarang dari anggota sembarang dari semestanya, seperti juga kata "mahasiswa". Sebagaimana konstan maka variabel adalah unsur bahasa dan bukan unsur dari semestanya.

DEFINISI : VARIABEL adalah lambang yang melambangkan anggota sembarang dari semestanya. Semesta ini disebut DAERAH JELAJAH (range) dari variabel itu.

Lambang tersebut dalam definisi di atas dapat berupa huruf lain ataupun dapat dipilih lambang lainnya seperti umpamanya ☐ dan sebagainya. Peranan variabel sama dengan peranan tempat kosong dalam suatu formulir. Misalnya :

Yang bertanda tangan di bawah ini _________, Kepala Desa _________ Kecamatan Percut Sei Tuan menerangkan bahwa warga desa bernama ________ sudah melunasi PBB tahun ______ . . . dst.

Setelah tempat-tempat kosong itu diisi dengan nama-nama (orang, desa dan tahun dsb) maka barulah kalimatnya menjadi kalimat deklaratif. Demikian juga ungkapan :

x adalah bilangan genap

bukanlah kalimat deklaratif. Kalimatnya berubah menjadi kalimat deklaratif setelah variabel "x" diganti dengan konstan (nama anggota tertentu). Kalimat yang memuat variabel bebas seperti kalimat di atas disebut KALIMAT TERBUKA (open sentence atau sentential function). Dalam matematika mengganti huruf "x" dengan suatu konstan sering diucapkan dengan kata-kata "mensubstitusikan konstan untuk variabel".

Dari uraian di atas tampak mengapa banyak penulis yang memerikan (describe) variabel sebagai pemegang tempat (place holder).

Pentingnya kosep variabel sebagai place holder terletak pada kegunaannya yang luar biasa besarnya dalam matematika. Perhatikan misalnya rumus aljabar yang disajikan dengan menggunakan variabel di bawah ini :

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Tanpa penggunaan variabel, dengan menggunakan bahasa biasa, maka kalimat di atas dapat dinyatakan sebagai berikut :

> Untuk pasangan-pasangan bilangan sembarang berlakulah bahwa selisih dari bilangan pertama pangkat tiga dengan bilangan kedua pangkat tiga adalah sama dengan selisih bilangan pertama dengan bilangan kedua digandakan dengan hasil penjumlahan kuadrat bilangan pertama dengan hasil kali kedua bilangan itu dan kuadrat bilangan kedua.

Memanipulasi rumus di atas (yang singkat dan jelas) jauh lebih mudah dibandingkan dengan kalimat terakhir. Kalimat terakhir ini, di samping panjangnya, mudah mengundang kesalahan pengertian. Dalam sejarahnya, perkembangan matematika jauh lebih cepat akibat penggunaan variabel dibandingkan dengan sebelum penggunaan variabel. Perhatikanlah keampuhan cara penyelesaian persoalan-persoalan matematika melalui metode persamaan yang melibatkan variabel.

Konsep variabel sudah dikenal oleh para filosof jaman Yunani kuno walaupun penggunaannya sangat terbatas. Aristoteles menggunakannya dalam silogisma-silogisma yang terkenal, misalnya : Semua a adalah b. Semua b adalah c. Maka semua a adalah c. Huruf-huruf "a", "b" dan "c" adalah variabel. Matematikawan Perancic, VIETA (1540 - 1603) memperkenalkan dan menggunakannya secara sistematis dalam matematika. Peranan yang sangat menentukan dari konsep variabel dalam matematika tampak lebih nyata setelah pada akhir abad ke-19 konsep KUANTOR diperkenalkan dalam bahasa matematika, terutama oleh pengaruh filosof matematikawan Amerika PEIRCE (1839 - 1914).

Selain dari penggunaannya dalam kalimat terbuka (sentencial function) seperti $x < 4$, maka variabel juga digunakan dalam fungsi-fungsi DESIGNATORIK (designatory function) seperti :

$$3(x - y), \quad \frac{x + y - 2}{2x + y}, \quad 4x - 5y + 2$$

Fungsi-fungsi designatorik di atas berubah menjadi designatorinya bilangan-bilangan tertentu setelah para variabel di dalamnya diganti dengan konstan-konstan tertentu.

LATIHAN

1. Sebagai semesta diambil himpunan bilangan riel. Perhatikan kalimat di bawah ini : Untuk pasangan bilangan x, y sembarang dapat ditemukan bilangan z sedemikian hingga $x < z < y$. Apakah kalimat di atas merupakan kalimat terbuka ataukah kalomat deklaratif ? Apabila kalimatnya pernyataan maka tentukan nilai logikanya.
2. Apakah susunan kata (phrase) "Presiden Republik Indonesia tahun 1990" merupakan konstan atau variabel ? Apabila konstan apa bedanya dengan nama sebagai konstan ? (Bandingka dengan terjemahannya dalam bahasa Inggeris "The president of Republic of Indonesia in 1990".

Di antara bentuk-bentuk di bawah ini tentukan mana yang merupakan kalimat terbuka dan mana yang merupakan fungsi designatorik. Apabila merupakan kalimat terbuka tentukan mana yang dipenuhi oleh semua anggota, mana oleh beberapa tetapi tidak semua anggota dan mana yang tidak dipenuhi oleh satu anggotapun.

3. $x + y < x + y + z$
4. $x + y + z$
5. Hasil penjumlahan x dan 4
6. Hasil penjumlahan x dan y
7. Ayahnya x, y dan z
8. x adalah kakak kandung y
9. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
10. $x^2 + x - 2 = 0$
11. $x^2 + 1 = 0$ di mana semestanya adalah himpunan bilangan riel.
12. $x > 4$

6. MENGGUNAKAN DAN MENYEBUT SUATU SIMBOL

Perhatikan kalimat-kalimat di bawah ini :

(a). DIDI adalah mahasiswa matematik
(b). "DIDI" terdiri atas empat huruf

Dalam kalimat pertama kata "DIDI" digunakan (used) untuk berbicara tentang si pemuda, sedangkan pada kalimat kedua, kata itu disebut (mentioned). Kemungkinan salah faham kecil atau tidak ada sama sekali. Tetapi sekarang perhatikan penalaran di bawah ini :

(1). $\frac{30}{6} = \frac{15}{3}$

(2). Penyebut dari $\frac{30}{6}$ habis dibagi oleh 2.

(3). Karena $\frac{30}{6} = \frac{15}{3}$ maka dengan mengadakan substitusi :

(4). Penyebut dari $\frac{15}{3}$ habis dibagi oleh 2.

(5). Kesimpulan : 3 habis dibagi oleh 2.

Kesimpulannya jelas salah, namun di mana letak kekeliruan penalaran di atas ?
Kekeliruan terletak pada pencampur adukan penggunaan (use) dengan penyebutan (mention) suatu simbol. Kita ingat aturan bahasa untuk menggunakan simbol (yaitu nama suatu obyek) jika berbicara tentang simbol itu. Berbicara tentang presiden A.S. , kita tidak membawa beliau ke ruang pembicaraan, cukup menggunakan namanya. Bahasa alami sering melanggar aturan ini jika berbicara tentang kata. Jika aturan itu dipatuhi maka dalam kalimat (b) di atas, di mana kita berbicara tentang suatu kata, seharusnya digunakan suatu simbol dari kata itu dan bukan kata itu sendiri. Sehingga kita harus menggunakan nama dari suatu nama. Suatu teknik yang disepakati oleh para logikawan ialah teknik tanda kutip. Sebagai simbol dari suatu kata dipilih kata itu sendiri tetapi diletakkan antara sepasang tanda kutip. Dengan menggunakan teknik ini maka kalimat (b) berubah menjadi :

(b). ""DIDI"" terdiri atas empat huruf.

di mana yang dibicarakan adalah bentuk di antara tanda kutip. Kadang-kadang kita hendak berbicara tentang nama dari nama. Maka harus digunakan suatu simbol darinya yaitu nama dari nama dari nama. Oleh karena itu nama dari nama itu diletakkan di antara sepasang tanda kutip lagi. Sebagai contoh perhatikan kalimat di bawah ini yang kelihatannya janggal namun ditulis konsekuen sesuai dengan aturan dan teknik tersebut di atas.

> ""Medan"" tertulis antara satu pasang tanda kutip tetapi "Medan" tidak tertulis antara pasangan tanda kutib, sedangkan amat sulit untuk meletakkan tanda-tanda kutip di barat dan timurnya Medan.

Phrase terakhir membicarakan suatu kota (suatu obyek) dengan menggunakan nama (yaitu suatu simbol) darinya. Memang amat sulit untuk meletakkan tanda-tanda kutip di barat dan timurnya kota itu. Dalam phrase sebelumnya yang dibicarakan ialah ialah suatu kata.

Maka digunakan nama darinya yaitu kata itu sendiri diletakkan di antara sepasang tanda kutip. Tetapi nama itu sendiri (bukan nama darinya) tidak terletak antara tanda-tanda kutip. Sedangkan pada permulaan kita berbicara tentang bentuk di antara tanda-tanda kutip yang paling luar.

Sekarang kita perhatikan kembali kekeliruan penalaran yang menyimpulkan 3 habis dibagi oleh 2 di atas.
Jika teknik tanda kutip digunakan dengan konsekuen maka kalimat (2) seharusnya ditulis dengan cara :

> Bilangan yang dilambangkan oleh penyebut dari "$\frac{30}{6}$" habis dibagi oleh 2.

Oleh karena tanda "$\frac{30}{6}$" tidak sama dengan tanda "$\frac{15}{3}$" maka substitusi tidak dapat dilakukan sehingga kekeliruan pengambilan kesimpulan tidak mungkin terjadi.

LATIHAN

Tulislah kalimat-kalimat di bawah ini dengan tepat dengan meletakkan tanda-tanda kutip (satu pasang, dua pasang, tiga pasang) dan seterusnya sebagaimana mestinya.

1. Pemuda Tono selalu menulis nama "Tono" dengan tinta merah.
2. Angka 4 adalah lambang dari bilangan "4" dan bilangan ini mempunyai 2 sebagai faktor.
3. Bilangan dua dapat dilambangkan dengan angka Romawi II, tetapi juga dengan angka 2, juga dengan perkataan dua.
4. Dalam bentuk a + 3 = k untuk "a" disubstitusikan "5". Setelah substitusi dikerjakan "k" merupakan bilangan genap sehingga mempunyai 2 sebagai faktor.
5. Apabila a + 7 adalah bilangan genap maka "a" pastilah lambang bilangan ganjil. Jadi a adalah bilangan ganjil.
6. Apabila a + 7 ditambah dengan a + 7 maka hasilnya ialah 2a + 14. Bentuk "2a + 14" memuat huruf "a", angka "2", rangkaian angka "14" dan tanda penjumlahan "+".

7. "Tono" adalah nama dari pemuda Tono sehingga lambang dari pemuda Tono adalah "Tono".
8. Kata "Solo" adalah lambang dari kota Solo. Maka dengan menggunakan teknik tanda kutip maka lambang dari lambang dari kota Solo adalah ""Solo"".

7. KONJUNGSI, DISJUNGSI DAN NEGASI

Kalimat-kalimat tertentu seperti :

> Gedung ini tinggi
> Lukisan ini indah

disingkat (bukan simbol) dengan huruf-huruf besar "A", "B" dan seterusnya. Kalimat-kalimat seperti ini dapat dihubungkan satu sama lainnya dengan menggunakan KATA PENGHUBUNG KALIMAT (logical connectives) yaitu DAN (&), ATAU (V), TIDAKLAH (~). Misalnya

> Gedung ini tinggi dan lukisan ini indah
> Gedung ini tinggi atau lukisan ini indah
> Tidak benar bahwa gedung ini tinggi

Dengan menggunakan singkatan-singkatan dan simbolisma logika maka kalimat-kalimat di atas ditulis sebagai :

A & B, A V B, ~A atau $\bar{A}$

Perhatikan bahwa ingkaran dari A yaitu ~A dapat juga disajikan dengan $\bar{A}$ (diucapkan tidaklah A atau non-A). Kalimat-kalimat "A & B", "A V B" dan "$\bar{A}$" berturut-turut disebut KONJUNGSI, DISJUNGSI dan NEGASI. Kalimat di mana tampak tanda (atau tanda-tanda) penghubung kalimat, dinamakan KALIMAT MAJEMUK (compound statement) atau KALIMAT MOLEKULER. Sedang kalimat "A", "B" dan seterusnya KALIMAT TUNGGAL atau KALIMAT ATOMIK. Nilai logiknya (yaitu benar/salahnya) konjungsi, disjungsi dan negasi didefinisikan dengan tabel-tabel nilai di bawah ini.

A	B	A & B
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

A	B	A V B
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

A	$\bar{A}$
T	F
F	T

Huruf-huruf "T" dan "F" dibaca "benar (true)" dan "salah (false)" Banyak penulis yang menggunakan "1" dan "0" sebagai pengganti "T" dan "F". Perhatikan bahwa satu-satunya kemungkinan konjungsi "A & B" bernilai benar ialah apabila kalimat-kalimat komponennya keduanya bernilai benar (T). Konjungsi bernilai salah jika sekurang-kurangnya salah satu kalimat komponennya bernilai salah. Sebaliknya disjungsi "A V B" bernilai benar (T) jika sekurang-kurangnya salah satu kalimat komponennya bernilai benar. Satu-satunya kemungkinan disjungsi "A V B" bernilai salah ialah jika kalimat-kalimat komponennya kedua-duanya bernilai salah. Kalimat "$\bar{A}$" disebut negasi (ingkaran) dari "A" dan didefinisikan sebagai salah jika "A" benar dan sebaliknya. Perhatikan bahwa "$\bar{\bar{A}}$" bernilai logik sama dengan "A".

Definisi dari konjungsi di atas sesuai dengan pemakaian kata "dan" dalam bahasa sehari-hari. Umpamanya jika Banu berkata : "Saya adalah bangsawan dan hartawan" maka dia di sini bohong (yaitu mengucapkan kalimat yang salah) apabila ia tidak sekaligus bangsawan dan hartawan. Sebaliknya perkataan "atau" dalam percakapan sehari-hari digunakan dengan dua arti yaitu inklusif, di mana dua komponennya dapat sekaligus bernilai benar, dan eksklusif, di mana hanya satu komponen yang dapat bernilai benar. Contoh pemakaian disjungsi inklusif ialah kalimat : "Mahasiswa atau guru mendapat reduksi biaya". Sedangkan contoh dari pemakaian disjungsi eksklusif ialah kalimat : "Memperhatikan logatnya ia pasti orang Karo atau Simalungun". Dalam matematika kita sepakat senantiasa menggunakan kata "atau" dalam arti inklusif. Ini berarti bahwa sekurang-kurangnya salah satu kompo-

nennya benar (boleh keduanya). Sehingga umpamanya kalimat "$3 \leqslant 4$" dan "$2 < 3$ atau $2 \times 2 = 4$" keduanya dinilai benar.

8. IMPLIKASI MATERIAL

Penggunaan susunan kata "apabila . . . maka . . . " dalam matematika banyak menyimpang dari pemakaiannya dalam percakapan sehari-hari. Oleh karena itu akan dibicarakan lebih terperinci. Sebagaimana halnya dengan kata-kata penghubung lainnya, maka penggunaannya didefinisikan dalam suatu tabel nilai. Setiap definisi yang penting, yaitu yang mempunyai dampak yang menentukan, pada perkembangan ilmu yang bersangkutan seharusnya disertai dengan suatu JUSTIFIKASI, di mana dikemukakan alasan-alasan mengapa definisi itu ditetapkan sedemikian. Di sini dipandang perlu mengetengahkan justifikasi itu, sekaligus juga dibahas perbedaan penggunaannya dalam bahasa sehari-hari untuk menghilangkan "keganjilan yang dirasa ada pada definisinya. Simbolisme logika untuk susunan kata "apabila . . . maka . . . " adalah "$\Longrightarrow$", sedangkan kalimatnya disebut IMPLIKASI MATERIAL. Implikasi dalam percakapan sehari-hari disebut implikasi biasa (ordinary implication).

A	B	$A \Longrightarrow B$	
T	T	T	baris ke-1
T	F	F	baris ke-2
F	T	T	baris ke-3
F	F	T	baris ke-4

Kalimat di depan tanda implikasi disebut ANTESEDEN sedangkan kalimat yang di belakangnya disebut KONSEKUEN. Kalimat implikasinya sendiri sering disebut KONDIDIONAL

Dari tabel tampak bahwa implikasi "A ⟹ B" bernilai benar jika :

1. ANTESEDEN BERNILAI SALAH (baris ke-3 dan ke-4)
2. KONSEKUEN BERNILAI BENAR (baris ke-1 dan ke-3)

Sehingga dengan menggunakan definisi dari kata "atau" (disjungsi), definisi implikasi dapat dinyatakan demikian :
Suatu implikasi bernilai benar jika antesedennya salah atau konsekuennya benar.

Sekarang akan dibandingkan implikasi material dengan implikasi ordinal (dalam bahasa sehari-hari). Pertama-tama, jika dalam bahasa alami (natural language) orang mengucapkan susunan kata "apabila . . . maka . . . " , maka biasanya ada sesuatu hubungan antara anteseden dan konsekuen. Tidak pernah orang mengucapkan kalimat seperti : "Apabila bulan berbentuk bulatan maka rumput di depan rumah saya berwarna hijau". Hubungan antara anteseden dan konsekuen tersebut dapat berupa suatu janji (apabila anda lulus maka akan saya berikan hadiah), suatu tanda (apabila bendera berkibar setengah tiang maka ada pembesar yang wafat), sebab akibat (apabila anda makan terlalu banyak maka perut anda akan sakit), dapat diturunkannya konsekuen dari anteseden (apabila logam dipanasi maka logam itu akan mengembang), dan banyak lagi pemakaiannya dalam konnotasi yang bermacam-macam. Beranekaragamnya konnotasi itu dihindari dalam matematika. Perkembangan matematika memerlukan suatu bahasa yang eksak dan tidak yang kadang-kadang berkonnotasi bagini dan kadang-kadang berkonnotasi begitu. Maka dari itu penggunaan implikasi harus ditertibkan dan terpaksalah bahasa matematika menyimpang dari bahasa alami. Inilah justifikasi untuk penyimpangan dari bahasa alami.
Penertiban pertama dilakukan dengan meniadakan syarat bahwa harus ada suatu hubungan antara anteseden dan konsekuen, walaupun adanya hubungan diperbolehkan. Meaningfulness (mengandung artinya) suatu implikasi hanya bergantung pada mengandung artinya kalimat-kalimat komponennya. Sedangkan nilai logik suatu implikasi hanya ditentukan oleh nilai logiknya kalimat-kalimat kom -

ponen. Sehingga umpamanya kalimat : "Apabila Hitler paman saya maka Solo terletak di pulau Jawa" bukanlah kalimat tanpa arti tetapi mengandung arti, bahkan bernilai benar karená antesedennya salah. Ingatlah bahwa dalam hitungan kalimat hanya benar atau salahnya suatu kalimat yang diperhatikan.
Terlihat bagaimana jauhnya perbedaan antara implikasi material dengan implikasi biasa. Namun untuk mengurangi rasa keganjilan ini maka di bawah ini disajikan suatu implikasi yang kadang-kadang diucapkan dalam bahasa sehari-hari, di mana juga sebenarnya tidak ada sama sekali hubungan antara anteseden dengan konsekuen. Misalnya orang berkata : "Apabila Tono lulus maka dunia akan berhenti berputar". Jelas bahwa tidak ada hubungan apapun antara lulus atau tidak lulusnya Tono dengan berputarnya dunia. Walaupun demikian implikasi itu diketengahkan sebagai implikasi yang benar. Selanjutnya karena konsekuennya pasti salah, yaitu bahwa dunia tidak akan berhenti berputar, maka antesedennya pasti salah juga. Jelas yang hendak dinyatakan oleh si pengucap kalimat ialah bahwa Tono pasti tidak lulus. Perhatikan bahwa penggunaan implikasi di atas, lengkap sesuai dengan baris ke-4 dari tabel (anteseden salah, konsekuen salah).

Suatu hal yang sering dirasakan ganjil juga ialah baris ke-3 dan baris ke-4 yaitu implikasi didefinisikan bernilai benar jika antesedennya salah. Sekali lagi untuk mengurangi rasa keganjilan ini, maka dalam bahasa sehari-haripun orang kadang-kadang menjumpai keadaan seperti itu. Misalnya ada aturan yang berlaku bagi para mahasiswa demikian : "Apabila mahasiswa itu laki-laki maka ia diwajibkan latihan militer". Jika mahasiswa Tono tidak latihan militer maka ia dikenakan hukuman, sebab ia menyalahi aturan (jadi implikasi bernilai salah, baris ke-2). Akan tetapi walaupun mahasiswa Tini (wanita) latihan militer atau tidak latihan militer (yaitu konsekuen benar atau salah) ia tidak melanggar aturan. Jadi implikasinya dinilai benar.

Sekarang dibahas mengapa implikasi didefinisikan seperti dalam tabel (justifikasi konstruksi tabel). Pertama-tama tabel ditentukan demikian hingga memuat inti berserikat dari bermacam-

macam pemakaian dalam percakapan sehari-hari. Misalnya apabila orang berjanji : "Apabila Tono lulus ujian maka dia akan saya belikan sepeda". Akan dibahas nilai logik kalimat ini untuk kasus-kasus :

Kasus-1 : Tono lulus ujian (anteseden benar), sedangkan sipembuat janji membeli sepeda (konsekuen benar). Si pembuat janji dinilai benar karena memenuhi janji (implikasi benar). Sesuai dengan baris ke-1 tabel implikasi.

Kasus-2 : Tono lulus ujian (anteseden benar), sedangkan si pembuat janji tidak membelikan sepeda (konsekuen salah). Dalam hal ini sipembuat janji dikatakan mengingkari janji atau disalahkan (implikasi salah). Sesuai dengan baris ke-2 tabel implikasi.

Kasus-3 : Tono tidak lulus ujian (anteseden salah), sedangkan sipembuat janji membelikan sepeda (konsekuen benar). Di sini sipembuat janji tidak dapat disalahkan (jadi implikasi benar). Sesuai dengan baris ke-3 tabel implikasi. Perhatikan bahwa tidak ada sesuatu disebut apabila Tono tidak lulus.

Kasus-4 : Tono tidak lulus (anteseden salah) sedang sepedapun tidak dibelikan (konsekuen salah). Di sini si pengucap janji tidak disalahkan, jadi benar. Sesuai dengan baris ke-4 tabel implikasi.

Di atas telah dikatakan bahwa adanya hubungan antara anteseden dengan konsekuen tidak disyaratkan (walaupun adanya hubungan diperkenankan). Hal ini berarti bahwa apabila diketahui benarnya suatu implikasi maka kadang-kadang ada hubungan, tetapi kadang-kadang tidak. Pada khususnya dengan diketahuinya bahwa **suatu implikasi itu bernilai benar, maka tidak boleh disimpulkan** bahwa ada hubungan sebab-akibat antara anteseden dengan konsekuen. Dengan kata lain, jika suatu implikasi "A ⟹ B" diketahui bernilai benar, orang tidak senantiasa dapat mengatakan bahwa kalimat "B" dapat diturunkan (dengan menggunakan hukum-hukum tertentu) dari kalimat "A". Akan tetapi sebaliknya :

> Apabila dari kalimat "A" dengan langkah-langkah yang sahih (correct) diturunkan kalimat "B" , maka kalimat "A ⟹ B" dinyatakan sebagai kalimat yang benar.

Operasi kalimat : "dan", "atau", "tidak", "jika ... maka ...", "jika dan hanya jika"

Dalam pada itu ada dua kemungkinan :

1. Kalimat "A" bernilai benar. Jika demikian kalimat "B" pasti benar juga. Hal inisesuai dengan baris ke-1 dari tabel.
2. Kalimat "A" bernilai salah. Jika demikian dengan langkah-langkah sahih, kadang-kadang dapat diturunkan kalimat "B" yang bernilai salah, tetapi juga kadang-kadang suatu kalimat "B" yang bernilai benar. Hal ini sesuai dengan definisi dari baris ke-3 dan baris ke-4 pada tabel.

Bahwa dari ketentuan yang salah, secara sahih dapat diturunkan hal yang benar sering kali sukar diterima. Dikatakan bahwa di suatu tempat pada langkah-langkahnya pasti dibuat suatu kesalahan kedua yang menetralisasi kesalahan pada ketentuan. Tetapi penalaran sedemikian tidak benar. Untuk memberi keyakinan, di bawah ini disajikan suatu contoh di mana :

> Dari sesuatu yang salah, dengan langkah-langkah yang sahih tanpa membuat kesalahan kedua, dapat diturunkan hal yang benar. Namun tidak senantiasa demikian.

(1).
$$4 = 6$$
$$\frac{4}{2} = \frac{6}{2}$$
$$2 = 3$$
$$2x0 = 3x0$$
$$0 = 0$$

(2)
$$4 = 6$$
$$\frac{4}{2} = \frac{6}{2}$$
$$2 = 3$$
$$2x4 = 3x4$$
$$8 = 12$$

(3)
$$4 = \frac{8}{2}$$
$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4}$$
$$2 = 2$$

Dalam contoh (1) dari hal yang salah (4 = 6) diturunkan secara sahih sesuatu yang benar (0 = 0). Dalam contoh (2) dari hal yang salah diturunkan secara sahih hal yang salah juga. Sedangkan dalam contoh (3) secara sahih dari hal yang benar dengan pasti diturunkan hal yang benar. Contoh (1) sesuai dengan baris ke-3 dari tabel. Contoh ke-2 sesuai dengan baris ke-4, sedangkan contoh (3) sesuai dengan baris ke-1.

Sahihnya suatu penalaran dinyatakan dengan benarnya "A ⟹ B". Sekali lagi ditandaskan bahwa jika diketahui "A ⟹ B" bernilai benar dan "A" bernilai benar juga maka "B" pasti benar juga.

Akan tetapi jika "A⟹B" bernilai T sedangkan "A" bernilai F maka tidak dapat diturunkan apapun tentang benar atau salahnya kalimat "B". Baris ke-3 dan baris ke-4.
Dari pembicaraan di atas ternyata bahwa segala sesuatu dari tabel sesuai dengan penalaran sahih dalam logika alami yang dimiliki oleh setiap orang. Inilah merupakan suatu justifikasi mengapa tabel dikonstruksikan demikian.

Kalimat "A⟹B" dapat diucapkan dalam berbagai cara :

1) Apabila A maka B (A implies B)
2) B apabila A (B if A)
3) A hanya apabila B (A only if B), sebab jika tidak B (yaitu "B" bernilai salah) maka juga tidak A. Sesuai dengan baris ke-4 dari tabel.
4) A adalah syarat cukup bagi B. Sebab jika A terjadi (yaitu kalimat "A" bernilai benar) maka B pun terjadi. Sesuai dengan baris ke ke-1.
5) B adalah syarat perlu untuk A. Terjadinya B memang mutlak diperlukan untuk terjadinya A. Sebab jika tidak B maka tidak A juga.

Perhatikan bahwa tidak ada hubungan antara syarat perlu dan syarat cukup, yaitu bahwa syarat perlu belum tentu cukup, sebaliknya syarat cukup tidak usah perlu. Contoh tentang ini adalah :
Agar supaya ABCD merupakan bujursangkar maka syarat perlu untuk itu ialah bahwa diagonal-diagonalnya potong-memotong tegak lurus. Dengan menggunakan tanda implikasi :

ABCD bujursangkar ⟹ diagonal-diagonalnya berpotongan tegak lurus.

Walaupun diagonal-diagonal berpotongan tegak lurus itu merupakan syarat yang perlu, namun tidaklah cukup. Ambil misalnya belah ketupat atau layangan.

Contoh di bawah ini memperlihatkan adanya syarat yang cukup tetapi tidak mutlak diperlukan :

Syarat yang cukup agar ABCD merupakan jajaran genjang ialah bahwa sisi-sisinya sama panjang.

Sisi-sisi ABCD sama panjang ⟹ ABCD jajaran genjang.

Namun ada juga jajaran genjang di mana sisi-sisinya tidak sama panjang. Sehingga syaratnya tidaklah perlu. Ada juga syarat yang sekali gus perlu dan cukup. Hal ini akan dibahas pada pembicaraan tentang bi-implikasi.

DEFINISI : $B \Rightarrow A$ disebut KONVERS dari $A \Rightarrow B$

$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ disebut INVERS dari $A \Rightarrow B$

$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ disebut KONTRA POSISI dari $A \Rightarrow B$

Perhatikan bahwa apabila implikasi mula-mula bernilai benar maka konvers dan inversnya belum tentu benar dan belum tentu pula salah.

Misalkan implikasi mula-mula adalah (x sembarang) :
(1) Apabila x bilangan positif maka 2x pun bilangan positif (T)
(2) Apabila x bilangan positif maka x^2 pun bilangan positif (T)

Konvers dan inversnya berturut-turut adalah :
(1)' Apabila 2x bilangan positif maka x pun bilangan positif (T)
(1)'' Apabila x bukan bilangan positif maka 2x pun bukan bilangan positif (T).
(2)' Apabila x^2 bilangan positif maka x pun bilangan positif (F)
(2)'' Apabila x bukan bilangan positif maka x^2 pun bukan bilangan positif (F).

Ternyata bahwa jika implikasi mula-mula bernilai benar maka konvers dan inversnya kadang-kadang benar tetapi kadang-kadang salah. Fakta yang diilustrasi dengan contoh di atas dapat diturunkan juga dengan tabel di bawah ini :

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	IMPL.MULA	KONVERS	INVERS
				$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

Tampak dari tabel bahwa jika kalimat "$A \Rightarrow B$" bernilai T (baris ke-3 dan ke-4) maka nilai dari konvers yaitu "$B \Rightarrow A$" dan invers yaitu "$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$" kadang-kadang bernilai T tetapi kadang-kadang bernilai F.

Akan tetapi kontraposisi suatu implikasi senantiasa mempunyai nilai logik yang sama dengan implikasi mula-mula, seperti tampak pada tabel berikut ini :

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	IMPL.MULA	KONTRA POSISI
				$A \Rightarrow B$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Contoh : Kontra posisi dari kalimat (1) dan (2) di atas (yang keduanya bernilai benar ialah :

(1)''' Apabila 2x bukan bilangan positif maka x pun bukan bilangan positif (T).

(2)''' Apabila x^2 bukan bilangan positif maka x pun bukan bilangan positif (T).

Sering kali dalam matematika kita jumpai persoalan : Ditentukan A, buktikanlah B. Dengan kata lain yang harus dibuktikan ialah benarnya kalimat implikasi "$A \Rightarrow B$". Maka orang dapat mulai dengan kalimat "A" dan dengan langkah-langkah yang sahih membuktikan "B" atau orang dapat mulai dengan "$\bar{B}$" dan membuktikan "$\bar{A}$". Inilah contoh pembuktian dengan kontra posisi.

LATIHAN

Dengan menggunakan tabel-tabel nilai buktikan bahwa :

a. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ mempunyai nilai logik yang sama dengan $(A \& B) \Rightarrow C$

b. $A \Rightarrow (B \vee C)$ mempunyai nilai logik yang sama dengan $(A \& \bar{B}) \Rightarrow C$

c. $A \Rightarrow B$ mempunyai nilai logik yang sama dengan $\bar{A} \vee B$

9. BI-IMPLIKASI (BI-KONDISIONAL)

Bi-implikasi didefinisikan seperti pada tabel di bawah ini :

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Kalimat "$A \Longleftrightarrow B$" disebut bi-implikasi atau bi-kondisional dan di ucapkan "A bilamana dan hanya bilamana B", disingkat "bhb". Alasan dari ucapan di atas tampak pada tabel di bawah ini :

A	B	$A \Longrightarrow B$	$B \Longrightarrow A$	$(A \Rightarrow B)$ & $(B \Rightarrow A)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Ternyata bahwa tabel untuk "$(A \Longrightarrow B)$ & $(B \Longrightarrow A)$" adalah sama dengan tabel untuk "$A \Longleftrightarrow B$". Kita ingat bahwa "$A \Longrightarrow B$" dapat diucapkan "A hanya apabila (hanya blamana) B", sedangkan "$B \Longrightarrow A$" diucapkan "A apabila (bilamana) B". Setelah digabung dapat diucapkan "A bilamana B dan A hanya bilamana B" atau disingkat tanpa perbedaan arti "A bilamana dan hanya bilamana B", atau lebih singkat lagi "A bhb B". Mungkin saja ada yang menulis "A jika dan hanya jika B", disingkat "A jhj B". Dalam bahasa Inggeris ditulis "A if and only if B", disingkat "A iff B".

Kata-kata penggandeng seperti "dan", "atau". "tidaklah", "jika . . . maka . . .", "jika dan hanya jika" dan lain-lain yang sejenis, dalam logika kalimat dipandang sebagai operasi kalimat.

Sebagai operasi kalimat, maka perlu disepakati urutan pengerjaannya. Pandanglah kalimat majemuk :

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((A \,\&\, C) \Longleftrightarrow (B \,\&\, C))$$

Dengan adanya tanda-tanda kurung, pembaca mengetahui urutan mengerjakan operasi yang dimaksud oleh penulis kalimat. Tetapi jika kalimatnya memuat banyak tanda operasi maka diperlukan banyak tanda kurung. Untuk mengurangi banyaknya tanda kurung maka diadakan kesepakatan di bawah ini :

DAYA PENGIKAT TERKUAT DAYA PEMISAH TERLEMAH	& v $\Longrightarrow$ $\Longleftrightarrow$	DAYA PEMISAH TERKUAT DAYA PENGIKAT TERLEMAH

Setelah adanya kesepakatan di atas, maka kalimat "$A \Longrightarrow (B \,\&\, C)$" dapat ditulis sebagai "$A \Longrightarrow B \,\&\, C$" (tanda kurung berkurang). Tampak bahwa kesepakatan di atas memberi daya pemisah yang lebih besar pada " $\Longrightarrow$ " dari pada " & ". Sebaliknya daya pengikatnya " & " adalah lebih besar. Oleh karena menurut kesepakatan " $\Longrightarrow$ " dan " $\Longleftrightarrow$ " mempunyai daya yang sama , baik pemisah maupun pengikatnya maka pada "$A \Longrightarrow (B \Longleftrightarrow C)$" tanda-tanda kurung tak dapat dikurangi. Sebab pada tanda-tanda operasi yang mempunyai daya yang sama kuat, berlaku association to the left artinya tanda mana yang lebih dahulu muncul, operasi itulah yang dikerjakan lebih dahulu. Setelah adanya kesepakatan di atas kalimat

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow ((A \,\&\, C) \Longleftrightarrow (B \,\&\, C)) \quad \text{ditulis menjadi}$$

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow (A \,\&\, C \Longleftrightarrow B \,\&\, C).$$

Tanda yang mempunyai daya <u>pemisah</u> terkuat di antara tanda-tanda yang tampak disebut <u>tanda dominan</u>. Pada bentuk di atas, tanda dominannya adalah tanda kedua dari kiri, yaitu tanda implikasi. Tanda dominan inilah yang terakhir dikerjakan.

Daya pemisah suatu tanda dapat diperkuat dengan menggunakan tanda (tanda-tanda) titik, untuk mengurangi lagi banyaknya tanda kurung dengan kesepakatan :

Dengan menggunakan tanda titik, maka daya pemisah suatu tanda diperkuat ke arah sebelah pada mana tanda itu diletakkan. Suatu tanda yang diperkuat dengan tanda titik, lebih kuat daya pemisahnya dari semua tanda lainnya. Dua tanda titik lebih kuat dari satu. tanda titik, tiga tanda titik lebih kuat dari dua tanda titik dan seterusnya. Misalnya :

"A ==⇒ B.&.C diartikan "(A ==⇒ B) & C"

"A ==⇒ B.&.C ==⇒ D" diartikan "(A ==⇒ B) & (C ==⇒ D)"

"A ==⇒ B.&:C ==⇒ A. ==⇒ B" diartikan "(A ==⇒ B) & ((C ==⇒ A)==⇒ B)

Seperti tampak pada contoh-contoh di atas maka peranan tanda kurung dapat diambil alih sepenuhnya oleh tanda titik. Dengan demikiandidapat NOTASI TANDA TITIK.

Untuk mengubah notasi tanda titik menjadi tanda kurung dan sebaliknya maka dimulai dengan menentukan tanda dominan (yaitu tanda dengan daya pemisah terkuat) lalu bekerja ke luar. Sebagai contoh tahap pengubahan pandanglah :

A ==⇒ B.&:C ==⇒ A. ==⇒ B

A ==⇒ B.&(C ==⇒ A. ==⇒ B)

A ==⇒ B.&((C ==⇒ A) ==⇒ B)

(A ==⇒ B)&((C ==⇒ A) ==⇒ B)

Baik pada notasi tanda kurung maupun tanda titik maka menggunakan lebih banyak tanda kurung (titik) dari pada yang minimal, diperbolehkan, demi memudahkan pembacaan. Misalnya :

1. C&A ==⇒ B.&:C ==⇒ A.&B 1'. (C&A ==⇒ B)&((C ==⇒ A)&B)
2. C&A. ==⇒ B:&:C ==⇒ A.&B 2'. (C&A) ==⇒ B)&((C ==⇒ A)&B)

Pada penulisan pertama banyaknya tanda-tanda titik (kurung) adalah minimal, namun penulisan kedua lebih mudah dibaca. Sering suatu kombinasi tanda kurung dengan tanda titik depergunakan se-

perti dalam bentuk "(A ==⇒ B) ==⇒ C.v(AvB)" di mana jelas bahwa tanda disjungsi pertama adalah tanda yang dominan,

Dalam ilmu hitung bilangan kesepakatan seperti ini juga ditemui yang juga dibutuhkan untuk mengurangi banyaknya pemakaian tanda-tanda kurung. Kesepakatan seperti ini berlaku untuk operasi hitung pokok yaitu " + ", " − " , " x " dan " : " . Kesepakatan atas kekuatan daya pengikat dan daya pemisah pada operasi hitung adalah seperti tercantum pada tabel berikut :

DAYA PENGIKAT TERKUAT	x	+	DAYA PEMISAH TERKUAT
DAYA PEMISAH TERLEMAH	:	−	DAYA PENGIKAT TERLEMAH

Perhatikan bahwa urutan pengerjaan baik pada operasi kalimat maupun pada operasi hitung semata-mata adalah kesepakatan dan bukan sifat operasi itu. Tidak ada satu hukum (sifat) pun yang menyebutkan bahwa operasi perkalian lebih kuat dari operasi penjumlahan, demikian pula tidak ada dijumpai satu sifat yang mengharuskan operasi "dan" lebih kuat daya pengikatnya dari pada operasi "atau" sehingga operasi "dan" harus didahulukan dari operasi "atau". Kesepakatan bisa saja sewaktu-waktu berubah sesuai dengan kepentingan namun sifat tidak dapat berubah.

Di samping notasi-notasi yang disebutkan di atas, masih dekenal notasi lain yang disebut NOTASI POLANDIA yang berasal dari LUKASIEWICS seorang logikawan berkebangsaan Polandia. Keuntungan dari penggunaan notasi ini ialah bahwa notasi ini sama sekali tidak menggunakan tanda kurung maupun tanda titik. Hal ini dicapai dengan meletakkan tanda operasi <u>tidak di antara</u>, melainkan <u>di depan</u> kalimat-kalimat komponennya. Tanda operasi disajikan dengan huruf-huruf besar. Agar tidak menimbulkan keraguan maka kalimat-kalimat komponennya disajikan dengan huruf-huruf kecil p,q...

Maka :

"p & q" ditulis "K p q" (Konjungsi)

"p v q" ditulis "A p q" (Alternasi, Disjungsi)

"p ==⇒ q" ditulis "C p q" (Condisional, Implikasi

"p ⇐=⇒ q" ditulis "E p q" (Ekuivalensi, Bi-implikasi, Bikondisional)

"∼ p" ditulis "N p" (Non, negasi)

Contoh : Bentuk "p & q ==⇒ p v r" adalah suatu implikasi dari suatu konjungsi dengan suatu disjungsi (alternasi). Maka dengan notasi Polandia ditulis sebagai "C K p q A p r". Cara umum untuk mengubah notasi tanda kurung (titik) menjadi notasi Polandia ialah demikian. Pertama-tama kita menentukan tanda dominan dari bentuknya. Contoh : Pada bentuk

$$p \;\&\; q \Longrightarrow r : \Longleftrightarrow : p \;\&\; \bar{r} \Longrightarrow \bar{q}$$

tanda dominannya ialah tanda ekuivalensi (bi-implikasi), yaitu "E" dalam notasi Polandia. Tanda ini ditempatkan paling depan. Kemudian di ruas kiri ditentukan lagi simbol yang dominan. Setelah ruas kiri diselesaikan dengan lengkap maka ruas kananpun ditangani secara demikian. Maka bentuk di atas menjadi :

E CKpqr C KpNrNq

Contoh lain "∼∼∼p ⇐=⇒ ∼ p" menjadi E NNNpNq

Pengisian tabel untuk menentukan nilai logik dari suatu kalimat majemuk diganti dengan prosedur di bawah ini. Misalnya kita mencari nilai logik dari suatu kalimat majemuk "CCpgCNqNp" untuk p = T dan q = T

```
C C p q C N q N p
C C T T C N T N q
C   T   C F   F
C   T       T
    T
```


Maka nilai logik bentuk di atas untuk pemberian nilai p = T dan q = T adalah T.

Di bawah ini disajikan daftar notasi dari berbagai penulis

BUKU INI	PEANO-RUSSEL	HILBERT	POLANDIA
p & q	p . q	p & q	K p q
p v q	p v q	p v q	A p q
∼p, $\bar{p}$	∼p	$\bar{p}$	N p
p ==⇒ q	p ⊃ q	p → q	C p q
p ⇐=⇒ q	p ≡ q	p ∾ q	E p q

Perlu diperhatikan bahwa notasi "." dari Peano-Russel dimaksud sebagai ".&." sehingga mempunyai daya pemisah yang lebih kuat dari tanda-tanda lainnya.

LATIHAN

1. Tulislah bentuk-bentuk kalimat di bawah ini dalam bentuk simbolisme logika, kemudian buatlah tabel nilainya.
   a. Ia datang terlambat dan pertunjukan telah usai.
   b. Itu suara orang menangis atau suara kucing.
   c. Kalau orang sakit, biasanya ia tidak masuk kerja.
   d. Adam masuk dan terus duduk, sedang Hawa tetap duduk.
   e. Meskipun kalah, jago itu tetap bertarung sampai mati.
   f. Ia pindah ke Jakarta dan bekerja di sana, sekaligus sambil melanjutkan studinya.
   g. Ia tidak lulus, tetapi ia tidak menyesal, bahkan ia tertawa geli.
   h. Ia anak pandai atau ia bukan anak berbakat tetapi ia sekedar anak rajin.
   i. Kalau ia bukan anak pandai, maka ia tentu anak berbakat dan bukan hanya sekedar anak rajin.
   j. Sipenggedor masuk rumah, sambil melepaskan tembakan, sehingga tuan rumah menggigil ketakutan.

2. Buatlah tabel nilai bentuk-bentuk pernyataan di bawah ini :

   a. $\bar{p} \& q$ b. $\overline{p \Rightarrow \bar{q}}$ c. $(p \& q) \Rightarrow (p \vee q)$

   d. $\overline{p \& q} \vee \overline{q \Leftrightarrow p}$ e. $(p \Rightarrow q) \vee \overline{p \Leftrightarrow \bar{q}}$

   f. $(p \Rightarrow (\bar{q} \vee r)) \& \overline{q \vee (p \Leftrightarrow \bar{r})}$;

3. Sesuai dengan kesepakatan tentang kekuatan operasi hitung kalimat, tulislah bentuk-bentuk di bawah ini dengan banyaknya tanda kurung yang minimal. Kemudian ubahlah notasi tanda kurung menjadi notasi tanda titik.

   a. $(A \& B) \Longrightarrow (A \Longleftrightarrow (B \vee C))$

   b. $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (C \Longrightarrow ((A \& B) \vee C))$

   c. $(A \Longleftrightarrow B) \Longleftrightarrow ((B \& C) \vee D)$

   d. $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (C \Longrightarrow (A \& B))$

   e. $(A \& B) \vee C) \Longrightarrow (A \& B)$

4. Pada bentuk-bentuk di bawah ini ubahlah notasi tanda titik menjadi notasi tanda kurung.

   a. $A \& B \Longrightarrow C : \Longleftrightarrow : B \Longrightarrow . A \Longrightarrow C$

   b. $A . \vee . B \vee C : \Longrightarrow : A \vee B . \vee . C$

   c. $A \Longrightarrow B :: \Longrightarrow :: B \Longrightarrow C :: \Longrightarrow :. C \Longrightarrow D : \Longrightarrow : D \Longrightarrow E . \Longrightarrow . A \Longrightarrow E$

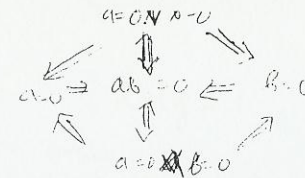
   d. $A . \vee . B \& C : \Longleftrightarrow : A \vee B . \& . A \vee C$

   e. $A \vee B . \Longleftrightarrow . \bar{p} \Longrightarrow q$

5. Tentukan nilai logik dari "E C K p q r C p C q r" bila diberikan nilai p = F, q = F dan r = T.

   Demikian juga nilai logik dari " E N C p q K p N q " untuk p = T dan q = F.

6. Ubahlah "E K $\bar{p}$ q N A N p N q" menjadi notasi tanda kurung dan notasi tanda titik. Demikian juga "E C K p q r C p C q r"

7. Ubahlah bentuk-bentuk pada soal 3 dan 4 ke notasi Polandia.

10. VARIABEL KALIMAT, TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

Pada bagian ini dibicarakan konsep-konsep dari logika kalimat yang sangat penting. Pertama-tama akan dibahas VARIABEL KALIMAT. Pengertian ini adalah analogi dari variabel numerik yang telah dikenal dalam aljabar. Demikian juga kalimat konstan adalah analogi dari konstan numerik. Kita ingatkan kembali bahwa semestanya hitungan kalimat adalah himpunan fakta (peristiwa, situasi, state of affairs) yaitu unsur-unsur dari dunia di luar bahasa. Sebagaimana kita memerlukan suatu lambang (yaitu angka) untuk untuk berbicara tentang suatu bilangan tertentu (yaitu anggota semesta dalam aljabar, atau ilmu bilangan) maka kita memerlukan suatu lambang juga untuk dapat berbicara tentang anggota tertentu dari semestanya hitungan kalimat. Seperti diketahui, lambang ini disebut KALIMAT KONSTAN , untuk mana dipilih huruf-huruf besar "A", "B", . . . Demikian juga kita gunakan lambang-lambang (biasanya dipilih huruf-huruf kecil "x", "y", . . .) yang disebut variabel numerik, untuk berbicara tentang bilangan (yaitu anggota) sembarang , dari semestanya. Huruf-huruf ini menempati tempatnya angka-angka (konstan numerik), umpamanya bentuk : "$2x + y - 6$", "$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$".

Analog dengan konsep variabel-numerik, ada konsep variabel kalimat dalam hitungan kalimat. Biasanya untuk variabel kalimat dipilih huruf-huruf kecil "p", "q", . . . Huruf-huruf itu juga berperan sebagai pemegang tempat, tetapi sekarang bukan pemegang tempat dari suatu konstan numerik melainkan dari suatu kalimat konstan. Maka didefinisikan :

DEFINISI : VARIABEL KALIMAT adalah lambang (unsur bahasa) yang melambangkan suatu peristiwa (fakta, situasi dsb) sembarang. Lambang itu menempati tempatnya suatu kalimat konstan.

Analogi dari suatu fungsi DESIGNATORIK (misalnya "$2x + y - 6$") adalah bentuk seperti "p & q ==> r". Rangkaian tanda ini disebut BENTUK KALIMAT (STATEMENT FORM) karena setelah para variabel

di dalamnya diganti dengan kalimat-kalimat konstan maka bentuknya menjadi kalimat pernyataan (yaitu lambang dari suatu situasi tertentu). Dalam pada itu tanpa memperhatikan fakta, yaitu tanpa melakukan observasi kalimat-kalimat seperti :

"Jono adalah presiden A.S. atau Jono bukan presiden A.S." $(Av\bar{A})$.

"4 adalah bilangan prima atau 4 bukan bilangan prima",

kita nilai sebagai benar. Penilaian ini didasarkan atas logika alami yang dimiliki oleh setiap manusia. Logika ini menyatakan bahwa suatu peristiwa itu terjadi atau peristiwa itu tidak terjadi. Sehingga kalimat-kalimat "$Av\bar{A}$", "$Bv\bar{B}$", . . . senantiasa bernilai benar tidak tergantung pada "A" , "B" , . . . dst. Hukum logika ini dalam logika tradisional disebut TERTIUM NON DATUR (EXCLUDED MIDDLE, tidak ada pilihan ketiga, tidak ada jalan tengah). Dengan tersedianya variabel kalimat maka hukum itu secara simbolis dapat disajikan dengan "$pv\bar{p}$".

Dalam aljabar, rumus-rumus umum seperti "$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$" disajikan dengan variabel numerik. Rumus-rumus itu adalah hukum-hukum dalam aljabar. Setelah para variabel di dalamnya diganti dengan konstan numerik maka bentuk senantiasa berubah menjadi kalimat dengan nilai benar. Jika ke dalam rumus aljabar di atas variabel "x" diganti dengan konstan "5" dan variabel "y" diganti dengan konstan "4" maka diperoleh kalimat deklaratif dengan nilai benar yaitu "$25 - 16 = (5 + 4)(5 - 4)$.

Situasi analog didapat dalam logika kalimat . Maka sampailah kita pada konsep TAUTOLOGI.

DEFINISI : Bentuk-bentuk yang memuat variabel kalimat dan yang menyajikan hukum-hukum dari logika kalimat disebut TAUTOLOGI.

Oleh sebab tautologi itu merupakan hukum dalam logika kalimat maka setiap penggantian dari para variabel dengan kalimat-kalimat konstan, akan menghasilkan suatu kalimat dengan nilai benar, asal saja untuk setiap penampilan dari satu huruf tertentu disubstitusikan kalimat konstan yang sama.

Contoh-contoh dari tautologi ialah :

$\vdash p \vee \bar{p}$

$\vdash p \Longrightarrow q \;.\Longrightarrow.\; \bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$

$\vdash (p \Longleftrightarrow q) \Longrightarrow (p \,\&\, r \Longleftrightarrow q \,\&\, r)$

Kadang-kadang kita ingin menandaskan atau mengingatkan pembaca bahwa yang dibahas adalah suatu tautologi dan bukan bentuk-bentuk (statement form) seperti "p ==> q & r". Untuk keperluan itu digunakan tanda " ⊢ " sebagai tanda untuk tautologi yang diletakkan di depan tautologi yang bersangkutan. Untuk membuktikan bahwa suatu bentuk itu merupakan tautologi maka metoda pengisian tabel senantiasa membawa hasil. Jika bentuk itu merupakan tautologi maka dalam lajur dari bentuknya akan tampak T untuk setiap pemberian nilai (value assignment) dari para variabel. Agar supaya tidak ada kombinasi value assignment yang terlewati maka orang harus bekerja secara sistematis. Yaitu kita harus menghabiskan semua kombinasi nilai q dan r untuk pemberian nilai T untuk p, kemudian segala kemungkinan untuk kombinasi nilai q dan r disertai dengan pemberian nilai F untuk p , seperti terlihat pada contoh di bawah ini. Untuk lebih dari tiga variabel ditangani analog.

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$p \,\&\, r \Leftrightarrow q \,\&\, r$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \,\&\, r \Leftrightarrow q \,\&\, r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Suatu bentuk merupakan tautologi <u>bilamana dan hanya bilamana</u> pada lajur untuk bentuk itu tampak hanya nilai T. Bila untuk lajur bentuk itu terdapat nilai T maupun nilai F, maka bentuk itu bukan tautologi, tetapi hanya bentuk kalimat (statement form) atau sering disebut KONTINGENSI. Metoda penyelidikan seperti ini, metoda dengan pengisian tabel disebut PROSEDUR PENENTUAN (DECISION PROCEDURE).

Di samping metoda tabel nilai ada cara yang lain (yang lebih canggih) untuk membuktikan suatu bentuk itu merupakan tautologi. Cara ini tidak dengan pengisian tabel, sebab penalaran dilakukan <u>dari luar tabel</u>, dengan <u>mengamati hasil</u> tabel. Contoh :

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longrightarrow (p \,\&\, r \Longleftrightarrow q \,\&\, r)$$

Untuk membuktikan bahwa bentuk ini merupakan tautologi maka kita amati bahwa bentuk keseluruhan merupakan suatu <u>implikasi</u> (perhatikan tanda dominan). Dengan mengamati tabel, kita ketahui bahwa suatu implikasi itu bernilai benar jika antesedennya salah atau konsekuennya benar. Antesedennya pasti salah jika "p" dan "q" mempunyai nilai yang berlainan. Maka cukuplah menyelidiki kejadian di mana "p" dan "q" mempunyai nilai logik <u>yang sama</u>. Tetapi dalam kejadian ini, ekuivalensi yang terletak di sebelah kanan tanda implikasi pasti bernilai benar, apapun nilai dari "r". Dengan demikian konsekuen dari seluruh bentuk itu bernilai benar dan terbuktilah bahwa bentuk itu merupakan tautologi.

Cara pembuktian lainnya dapat juga dilakukan dengan <u>reductio ad absurdum</u> (bukti kemustahilan). Prosedurnya adalah demikian: Andaikan bentuknya <u>bukan tautologi</u> . Oleh karena suatu implikasi bernilai salah <u>hanya</u> apabila anteseden bernilai benar dan konsekuen bernilai salah. Maka kalau bentuk itu bukan tautologi, pasti ada suatu pemberian nilai kepada para variabel yang mengakibatkan anteseden bernilai benar sedangkan konsekuennya bernilai salah. Anteseden bernilai benar jika "p" dan "q" bernilai sama. Dalam hal ini konsekuen tak mungkin bernilai salah, apapun nilainya "r". Langkah terakhir ini didapat dengan <u>mengamati</u> hasil tabel konjungsi dan ekuivalensi. Karena nilai bentuk itu tidak mungkin (mustahil) bernilai F maka pengandaian <u>salah</u> sehingga terbukti bahwa bentuk itu suatu tautologi.

LATIHAN

Buktikan bahwa bentuk-bentuk di bawah ini merupakan tautologi dengan mengisi tabel nilai. Kemudian cobalah membuktikannya dengan cara pengamatan dari luar tabel.

1. $(p \Longleftrightarrow q) \;.\Longleftrightarrow.\; (p \Longrightarrow q) \,\&\, (q \Longrightarrow p)$
2. $(p \Longleftrightarrow q) \;.\Longleftrightarrow.\; (\bar{p} \vee q) \,\&\, (\bar{q} \vee p)$
3. $(p \,\&\, q) \Longrightarrow r \;.\Longrightarrow.\; (p \,\&\, \bar{r}) \Longrightarrow \bar{q}$
4. $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r) \;.\Longleftrightarrow.\; q \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$
5. $p \Longrightarrow q \;.\Longrightarrow.\; (q \,\&\, r) \Longrightarrow (r \,\&\, p)$

   (buktikan pula dengan reductio ad absurdum)

Suatu bentuk yang memuat variabel-variabel kalimat dan yang senantiasa mempunyai nilai F (salah) untuk setiap pemberian nilai pada para variabel di dalamnya, disebut KONTRADIKSI. Misalnya bentuk "$p \,\&\, \bar{p}$". Ingkaran (negasi) dari setiap tautologi adalah kontradiksi.

11. RUMUS-RUMUS TAUTOLOGI DAN PENGGUNAANNYA

Pada uraian berikut ini disajikan rumus-rumus tautologi yang penting . Semua rumus ini dapat dibuktikan dengan metoda tabel. Namun penalaran di luar tabel nilai seperti telah dibicarakan di atas, seringkali dapat mencapai hasil yang jauh lebih cepat, lagi pula tidak menjemukan. Empat rumus yang pertama mempunyai kedudukan istimewa karena merupakan apa yang disebut suatu realisasi (model) dari suatu Abstract Boolean Algebra, di mana pada khususnya " $\Longleftrightarrow$ " adalah interpretasi dari " = " dalam aljabar tersebut. Semua rumus lainnya dapat diturunkan dari keempat rumus tersebut, namun pendekatan seperti itu tidak dibicarakan di sini.

1. $p \,\&\, q \Longleftrightarrow q \,\&\, p$ Hukum komutativitas konjungsi

   $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$ dan disjungsi

2. $p \,\&\, (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r)$ Hk. distributivitas konjungsi terhadap disjungsi

   $p \vee (q \,\&\, r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \,\&\, (p \vee r)$ Hk. distributivitas disjungsi terhadap konjungsi

3. $p \,\&\, T \Longleftrightarrow T \,\&\, p \Longleftrightarrow p$ T suatu kalimat yang bernilai benar

   $p \vee F \Longleftrightarrow F \vee p \Longleftrightarrow p$ F suatu kalimat yang bernilai salah

4. $p \vee \bar{p} \Longleftrightarrow T$

   $p \,\&\, \bar{p} \Longleftrightarrow F$

5. $p \Longleftrightarrow p$ Hk . identitas

   $\bar{\bar{p}} \Longleftrightarrow p$ Hk. negasi rangkap

   $p \,\&\, p \;.\Longleftrightarrow.\; p$ Hk. idempoten konjungsi

   $p \vee p \;.\Longleftrightarrow.\; p$ Hk. idempoten disjungsi

6. $(p \,\&\, q) \,\&\, r \Longleftrightarrow p \,\&\, (q \,\&\, r)$ Hk. assosiativitas konjungsi

   $(p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$ Hk. assosiativitas disjungsi

7. $T \Longrightarrow p \;.\Longleftrightarrow.\; p$

   $F \Longrightarrow p \;.\Longleftrightarrow.\; T$

   $p \Longleftrightarrow T \;.\Longleftrightarrow.\; p$

   $p \Longleftrightarrow F \;.\Longleftrightarrow.\; \bar{p}$

8. $p \Longrightarrow q \;.\Longleftrightarrow.\; \bar{p} \vee q$

   $p \Longrightarrow q \;.\Longleftrightarrow.\; \overline{p \,\&\, \bar{q}}$

   $p \Longleftrightarrow q \;.\Longleftrightarrow.\; (\bar{p} \vee q) \,\&\, (\bar{q} \vee p)$

   $p \Longleftrightarrow q \;.\Longleftrightarrow.\; (p \,\&\, q) \vee (\bar{p} \,\&\, \bar{q})$

9. $p \Longleftrightarrow q \;.\Longleftrightarrow.\; (p \Longrightarrow q) \,\&\, (q \Longrightarrow p)$

Misalkan harus dibuktikan bahwa : A bilamana dan hanya bilamana B, disingkat A bhb B atau $A \Longleftrightarrow B$. Maka kita berusaha membuktikan B dari A dan sebaliknya A dari B. Bukti selesai.

10. $(p \Longrightarrow q) \,\&\, (q \Longrightarrow r) \;.\Longleftrightarrow.\; p \Longrightarrow r$

    Rumus ini menyajikan sifat transitivitas dari implikasi

11. $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r) \;.\Longleftrightarrow.\; q \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$

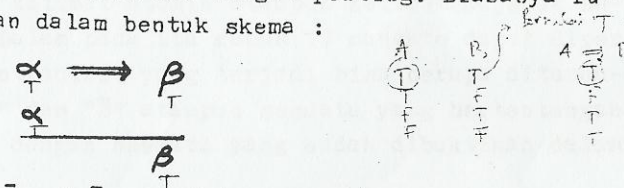
    Misalkan kita harus membuktikan $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$. Yaitu dengan ketentuan A, kita harus menurunkan C dari B. Karena tautologi di atas maka kita dapat mengambil B sebagai ketentuan dan menurunkan C dari A.

12. $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r) \;.\Longleftrightarrow.\; (p \,\&\, q) \Longrightarrow r$

    Ini disebut hukum EXPORTASI-IMPORTASI. Untuk membuktikan $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$ maka dibuktikan $(A \,\&\, B) \Longrightarrow C$. Yaitu kita ambil A dan B sebagai ketentuan dan dari ketentuan ini kita membuktikan C. Rumus ini dalam praktek matematika lebih banyak digunakan dibandingkan dengan rumus 10.

13. $p \,\&\, (p \Longrightarrow q) \;.\Longrightarrow.\; q$

    Hukum MODUS PONENS. Hukum ini sangat penting. Biasanya rumus ini disajikan dalam bentuk skema :

$$\frac{\alpha \Longrightarrow \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

14. $p \Longrightarrow q \;.\Longleftrightarrow.\; \bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ Hukum KONTRAPOSISI

    Hukum ini amat banyak digunakan dalam soal-soal matematika. Yaitu apabila orang menjumpai kesulitan membuktikan B dari A (yaitu membuktikan $A \Longrightarrow B$) maka dapat dicoba membuktikan $\bar{B} \Longrightarrow \bar{A}$. Sebagai illustrasi :

    Buktikan, apabila $\frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ ganjil maka n pasti genap.

    Bukti : Kontraposisi dari kalimat di atas sangat mudah dibuktikan. Ingkaran dari n genap adalanh n ganjil. Tetapi jika n ganjil maka $\frac{1}{2}(1 + (-1)^n) = 0$. Karena o itu bilangan genap maka bukti telah selesai karena kontraposisi kalimat di atas telah terbukti.

15. $\bar{q}$ & (p ==> q) . ==> . $\bar{p}$

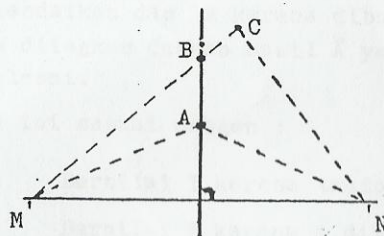
Hukum MODUS TOLLENS, yang dalam bentuk skema sering ditulis

$$\frac{\begin{matrix}\alpha \Rightarrow \beta \\ \bar{\beta}\end{matrix}}{\bar{\alpha}}$$

16. (p <==> q) . <==> . (p ==> q) & ($\bar{p}$ ==> $\bar{q}$)

Rumus ini langsung diperoleh dari rumus 9 dengan mengambil kontraposisi dari implikasi kedua di ruas kanan. Sebagai illustrasi perhatikan soal di bawah ini :

Buktikan bahwa tempat kedudukan dari titik-titik yang berjarak sama terhadap ujung-ujung M dan N dari ruas garis MN adalah garis tegak yang membagi sama besar ruas garis MN.

Bukti. Tempat kedudukan dari titik-titik yang memenuhi suatu syarat didefinisikan sebagai himpunan titik-titik dengan syarat tersebut sebagai syarat keanggotaan. Maka titik-titik pada garis tegak dibuktikan memenuhi syarat itu dan titik-titik di luar garis tegak dibuktikan tidak memenuhi syaratnya. Apabila "A" adalah singkatan dari "Titik P terletak pada tempat kedudukan " dan "B" singkatan dari "Titik P memenuhi syarat " maka yang harus dibuktikan ialah benarnya kalimat "A <==> B". Mengingat rumus 16 dan hukum kontraposisi maka cukup membuktikan A ==> B dan B ==> A. Bukti-bukti dikerjakan dengan menggunakan gambar di bawah.

Buatlah bukti selengkapnya.

17. $\overline{p \Rightarrow q}$. <==> . p & $\bar{q}$ — ingkaran dari implikasi

$\overline{p \,\&\, q}$. <==> . $\bar{p}$ v $\bar{q}$ — Hk. De Morgan pertama

$\overline{p \vee q}$. <==> . $\bar{p}$ & $\bar{q}$ — Hk. De Morgan kedua

$\overline{p \Leftrightarrow q}$. <==> . (p & $\bar{q}$) v (q & $\bar{p}$) — ingkaran ikuivalensi

Rumus-rumus ingkaran di atas banyak digunakan pada bukti-bukti dengan REDUCTIO AD ABSURDUM yang dibicarakan di bawah ini.

Bentuk umum dari bukti dengan REDUCTIO AD ABSURDUM (KEMUSTAHILAN) adalah demikian. Dimulai dengan mengandaikan bahwa yang berlaku adalah ingkaran dari yang harus dibuktikan. Dari pengandaian ini diturunkan suatu KONTRADIKSI. Karena kontradiksi tidak mungkin terjadi sedangkan penalaran yang ditempuh sahih maka kekeliruan harus ada pada permulaan penalaran yaitu pada pengandaian. Sehingga pengandaian harus diingkar. Dengan menggunakan ingkaran rangkap maka tercapailah apa yang harus dibuktikan. Apa yang harus dibuktikan dapat berupa kalimat atomik ataupun kalimat majemuk seperti implikasi dsb. Dalam pada itu rumus 17 mungkin dapat dipergunakan. Sedangkan kontradiksi yang terjadi bisa berupa diturunkannya dua kalimat "B" dan "$\bar{B}$" ataupun sesuatu yang bertentangan dengan ketentuan atau dengan sesuatu yang sudah dibuktikan dalam matematika.

Berikut ini disajikan beberapa bentuk dari pembuktian dengan reductio ad absurdum.

18. $\bar{p}$ ==> (q & $\bar{q}$) . <==> . p — Reductio ad absurdum bentuk pertama

Bentuk ini menyatakan bahwa apabila dari kalimat "$\bar{A}$" dapat diturunkan umpamanya "B & $\bar{B}$", maka dapat disimpulkan benarnya "A".

Sebab :

$\bar{A}$ ==> (B & $\bar{B}$) . <==> . A	Bernilai T karena tautologi di atas
$\bar{A}$ ==> (B & $\bar{B}$)	Bernilai T karena diturunkan dar $\bar{A}$
A	Bernilai T karena modus ponens

Contoh: Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.

Bukti. Bilangan irrasional adalah bilangan yang dapat disajikan sebagai basil bagi bilangan bulat sedangkan ingkarannya adalah bilangan irrasionanal. Jelas bahwa $\sqrt{2}$ bukanlah bilangan bulat. Andaikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional (disingkat A) dengan bentuk $\frac{m}{n} = 2$ di mana m dan n relatif prim dan $n \neq 1$. Sehingga

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \text{ atau } m^2 = 2n^2$$

Perhatikan bahwa m pasti genap, sebab kuadratnya genap. Jika demikian maka n pastilah ganjil (m dan n relatif prim). Maka $m = 2p$ dan $n = 2q + 1$, sehingga $m^2 = 4p^2$ dan $4 \mid m^2$ yaitu m^2 habis dibagi oleh 4 (disingkat B). Sedangkan $n^2 = 4q^2\ 4q + 1$ atau $2n^2 = 8q^2 + 8q + 2$ dan $4 \nmid 2n^2$. Karena $m^2 = 2n^2$ maka $4 \nmid m^2$ (disingkat $\bar{B}$) . Tampak bahwa $4 \mid m^2$ dan $4 \nmid m^2$ merupakan kontradiksi. Karena dari pengandaian diperoleh (diturunkan) suatu kontradiksi maka pengandaian harus diingkar dan bukti selesai.

19. $\bar{p} \Longrightarrow p\ .\Longrightarrow .\ p$ Reductio ad absurdum bentuk kedua

Untuk membuktikan A maka diandaikan $\bar{A}$. Apabila dari $\bar{A}$ ini dapat diturunkan A maka dalam sistemnya terdapat kontradiksi, yaitu $\bar{A}$ karena diandaikan dan A karena dibuktikan. Sehingga pengandaian harus diingkar dengan hasil $\bar{A}$ yaitu A sendiri. **Buktinya telah selesai.**

Segala sesuatunya ini sesuai dengan :

$\bar{A} \Longrightarrow A\ .\Longrightarrow .\ A$	Bernilai T karena tautologi (sesuai dengan 19)
$\bar{A} \Longrightarrow A$	Bernilai T karana A diturunkan dari $\bar{A}$
A	Bernilai T karena modus ponens

Contoh : Semesta bilangan-bilangan bulat. Apabila x^m habis dibagi oleh bilangan prim p maka x habis dibagi oleh p.

Bukti. Kalimat "$p \mid x$" disingkat "A". Kita gunakan suatu teorema dari ilmu hitung yang terkenal yaitu jika suatu hasil ganda itu habis dibagi oleh p maka sekurang-kurangnya satu faktornya habis dibagi p. Andaikan $p \nmid x$. Karena $p \mid x^m$ atau $p \mid x.x^{m-1}$ sedang $p \nmid x$ maka $p \mid x^{m-1}$. Demikian juga $p \mid x^{m-2}$, $p \mid x^{m-3}$ dan seterusnya. Akhirnya $p \mid x$. Buktinya selesai.

20. $(p \,\&\, \bar{q}) \Longrightarrow q\ .\Longrightarrow .\ p \Longrightarrow q$ Reductio ad absurdum bentuk ketiga

Contoh : Semesta himpunan bilangan riel. Untuk semua (a,b), apabila [untuk setiap $c > 0$ berlaku $a \leq b + c$] (disingkat A) maka [$a \leq b$] (disingkat B).

Bukti. Yang harus dibuktikan ialah suatu implikasi $A \Longrightarrow B$. Kita mulai dengan mengingkarinya, jadi andaikan $\overline{A \Longrightarrow B}$, yaitu $A \,\&\, \bar{B}$ (lihat 17). Dari ingkaran ini kita berusaha membuktikan B. Apabila berhasil maka terdapat kontradiksi dengan $\bar{B}$. Maka $A \,\&\, \bar{B}$ harus diingkar, sehingga $A \Longrightarrow B$ terbukti. Selanjutprosesnya dilakukan demikian :

$\bar{B}$ berarti $a > b$ atau $a - b > 0$ sehingga $\frac{a-b}{2} > 0$. Selanjutnya $\frac{a-b}{2}$ diambil sebagai c. Dengan mengambil ketentuan A maka $a \leq b + \frac{a-b}{2}$ atau $2a \leq 2b + a - b$. Jadi $a \leq b$ dan inilah B. Bukti selesai yaitu $A \Longrightarrow B$ terbukti.

Segala sesuatunya sesuai dengan :

$(A \,\&\, \bar{B}) \Longrightarrow B\ .\Longrightarrow .\ A \Longrightarrow B$	Bernilai T karena tautologi
$(A \,\&\, \bar{B}) \Longrightarrow B$	Bernilai T karena B diturunkan dari $A \,\&\, \bar{B}$
$A \Longrightarrow B$	Bernilai T karena modus ponens

21. $(p \,\&\, \bar{q}) \Longrightarrow \bar{p} \;.\Longrightarrow.\; p \Longrightarrow q$ Reductio ad absurdum bentuk ke-empat

Contoh : Apabila [a,b riel dan positif] (disingkat A) maka derlakulah $\left[\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}\right]$ (disingkat B).

Bukti. Yang harus dibuktikan ialah suatu implikasi $A \Longrightarrow B$. Ingkarannya $A \,\&\, \bar{B}$. Dari ingkaran ini kita berusaha membuktikan $\bar{A}$. Apabila berhasil maka terdapat kontradiksi, sebab A diketahui. Sehingga $A \,\&\, \bar{B}$ harus diingkar. Maka terbukti $A \Longrightarrow B$. Buktinya dikerjakan demikian:

Andaikan [a,b riel positif] dan $\left[\frac{1}{2}(a + b) < ab\right]$. Maka $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab) < ab$ atau $a^2 + b^2 + 2ab < 4ab$, sehingga $a^2 + b^2 - 2ab < 0$ atau $(a - b)^2 < 0$. Kontradiktoris dengan a,b riel. Terbukti $A \Longrightarrow B$.

Bukti di atas sesuai debgan :

$(A \,\&\, \bar{B}) \Longrightarrow \bar{A} \;.\Longrightarrow.\; A \Longrightarrow B$	Bernilai T karena tautologi 21
$(A \,\&\, \bar{B}) \Longrightarrow \bar{A}$	Bernilai T karena $\bar{A}$ diturunkan dari $A \,\&\, \bar{B}$
$A \Longrightarrow B$	Bernilai T karena modus ponens

22. $\bar{p} \;.\Longrightarrow.\; p \Longrightarrow q$ Tautologi ini disebut EX FALSO SEQUITOR QUOD LIBET (dari sesuatu yang salah, apapun dapat dibuktikan)

Rumus ini penting karena mempunyai akibat di bawah ini. Misalkan dalam matematika terdapat suatu kontradiksi A dan $\bar{A}$, sedangkan B suatu kalimat matematika sembarang, maka :

$\bar{A} \;.\Longrightarrow.\; A \Longrightarrow B$	Bernilai T karena tautologi 22
$\bar{A}$	Bernilai benar karena ketentuan
$A \Longrightarrow B$	Bernilai T karena modus ponens
A	Bermilai T karena ketentuan
B	Bernilai T karena modus ponens

Tampak kalimat sembarang "B" dapat dibuktikan bernilai benar.
Kesimpulan : Adanya suatu kontradiksi akan menjadikan matematika suatu pengetahuan trivial di mana setiap ucapan mempunyai nilai benar.

Dalam matematka orang membedakan bukti-bukti langsung (direct proofs) dan bukti-bukti tak langsung (indirect proofs). Reductio ad absurdum dan kontraposisi dianggap sebagai bukti tak langsung. Pada umumnya para matematisi lebih menyukai bukti langsung. Jika seorang matematisi berhasil menemukan suatu bukti langsung maka bukti itulah yang disajikan. Tetapi jika bukti langsung sukar atau tak mungkin ditemukan maka ditempuh jalan dengan bukti tak langsung.

LATIHAN

Buktikan bahwa bentuk-bentuk di bawah ini merupakan tautologi. Jika mungkin tanpa pengisisn tabel. Notasi yang digunakan ialah campuran tanda titik dan tanda kurung.

1. $p : \Longrightarrow : p \Longrightarrow q \;.\Longrightarrow.\; q$
2. $\bar{p} \Longrightarrow (p \vee q \Longrightarrow q)$ Modus tollendo ponens
3. $p \,\&\, q \Longrightarrow r : \Longleftrightarrow : \bar{r} \,\&\, q \Longrightarrow \bar{p}$
4. $(p \Longrightarrow q) \,\&\, (r \Longrightarrow s) : \Longrightarrow : (p \,\&\, r) \Longrightarrow q \,\&\, s$
5. $(p \Longrightarrow q) : \Longrightarrow : \overline{q \,\&\, r} \Longrightarrow \overline{r \,\&\, p}$
6. Apabila a,b riel positif maka $\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}$. Buktikanlah dengan menggunakan bukti langsung.
7. Carilah bukti dengan reductio ad absurdum maupun bukti langsung untuk soal : Apabila a bulat dan a^2 habis dibagi oleh 2 maka pastilah juga a habis dibagi oleh 2.
8. Perlihatkan bahwa untuk membuktikan
   $A \Longleftrightarrow B \Longleftrightarrow C \Longleftrightarrow D \Longleftrightarrow E \Longleftrightarrow F \Longleftrightarrow G$, cukup dibuktikan
   $A \Longrightarrow B \Longrightarrow C \Longrightarrow D \Longrightarrow E \Longrightarrow F \Longrightarrow G \Longrightarrow A$

II. K U A N T I F I K A S I

1. KUANTOR

Pembicaraan di atas memperlihatkan bahwa suatu kalimat terbuka dapat dijadikan kalimat deklaratif dengan mengganti semua variabel dengan konstan. Jalan lain untuk mengubah kalimat terbuka menjadi kalimat deklaratif ialah dengan menggunakan kuantor "(Ex)" dan "(Ax)" yang dibaca berturut-turut "terdapatlah suatu x sedemikian hingga" dan "untuk semua x berlakulah".

Pandanglah bentuk-bentuk

(Ex) P(X)

(Ax) P(x)

Bentuk pertama dapat dibaca :

1. Terdapatlah suatu x sedemikian hingga x itu mempunyai sifat P.
2. Ada sekurang-kurangnya satu x dengan sifat P.
3. Beberapa x mempunyai sifat P.

Bentuk kedua dibaca :

1. Untuk semua x berlakulah, x mempunyai sifat P.
2. Semua x mempunyai sifat P.

Bentuk-bentuk "(Ex)" dan "(Ax)" berturut-turut disebut kuantor eksistensial dan kuantor universal. Huruf-huruf "E" dan "A" berasal dari ucapan-ucapan Inggeris "there exist an x such that" dan "for all x it holds true that".

Beberapa penulis memakai simbol-simbol berikut :

Kuantor eksistensial	Kuantor universal
	(x)
(Ex)	(Ax)
$\exists x$	$\forall x$
$\bigvee_x$	$\bigwedge_x$

Bentuk-bentuk "(Ex) P(x)" dan "(Ax) P(x)" benar-benar merupakan kalimat-kalimat deklaratif karena dapat diberi nilainya benar atau salah. Ambil misalnya sebagai semesta pembicaraan himpunan bilangan-bilangan alam sedangkan huruf "P" menyajikan sifat prim. Maka kalimat "(Ex) P(x)" mengatakan adanya suatu bilangan prim. Suatu kalimat yang benar. Sedangkan "(Ax) P(x)" mengatakan bahwa semua bilangan alam mempunyai sifat prim. Kalimat yang salah. Huruf "x" yang terdapat pada kalimat di atas disebut juga variabel walaupun varabel tak sejati untuk membedakannya dari variabel bebas yang terdapat pada kalimat-kalimat terbuka. Dikatakan juga bahwa variabel "x" diikat oleh kuantor yang bersangkutan atau "x" berada dalam pengaruh kuantor yang bersangkutan. Kalimat-kalimat dengan semua variabel di dalamnya terikat, disebut kalimat tertutup. Kalimat-kalimat demikian adalah kalimat-kalimat deklaratif. Selanjutnya suatu kuantor itu mengikat lebih kuat dari pada tanda-tanda penggandeng apapun. Misalnya dengan : "(Ax) P(x) & (C ==> D)" dimaksud "((Ax) P(x)) & (C ==> D)".

Di sini juga tanda-tanda titik dapat mengambil alih peranan tanda-tanda kurung.

"(Ex) [P(x) & Q(X)]" dapat ditulis "(Ex) . P(x) & Q(X)".

Perhatikan benar-benar bahwa "A(x)" dibaca "x mempunyai sifat A" sedangkan "(Ax)" adalah suatu kuantor dan dibaca "untuk semua x berlakulah"

Dalam praktek matematika sehari-hari, sering kuantor-kuantor unuversal yang terletak pada permulaan suatu kalimat tidak ditulis, walaupun dipkirkan adanya. Umpamanya dalam rumus : $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ yang dimaksud sebenarnya ialah $(Ax)\ (Ay)\ .\ (x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$, juga dapat disingkat $(Ax,y)\ .\ (x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$ dan dibaca "untuk semua x dan untuk semua y berlakulah" dan seterusnya. Akan tetapi kuantor-kuantor universal yang tidak terletak pada permulaan suatu kalimat, orang harus lebih berhati-hati karena dapat menimbulkan keragu-raguan.

Karena dalam matematika sangat banyak digunakan kalimat-kalimat yang mengandung kuantor maka untuk memudahkan menangkap maksudnya, ucapkanlah ucapkanlah kuantor-kuantor itu dengan lengkap terlebih dahulu, kemudian renungkan artinya. Ambillah umpamanya sebagai semesta himpunan bilangan-bilangan riel, maka kalimat :

$(Ax)\left[(Ey)(y^2 < x) \Longrightarrow (Az)(x > -z^2)\right]$ atau

$(Ax) \,.\, (Ey)(y^2 < x) \Longrightarrow (Az)(x > -z^2)$

diucapkan lebih dahulu :

Untuk semua x berlakulah, apabila ada suatu y sedemikian sehingga y^2 lebih kecil dari pada x itu, maka, untuk semua z, x tadi lebih besar dari pada $-z^2$.

atau

Untuk semua x berlakulah bahwa. apabila x itu positif, maka x lebih besar dari setiap bilangan negatif.

Sehingga kalimat dalam simbolisme logika di atas tidak lain dari mengatakan bahwa setiap bilangan positif pasti lebih besar dari setiap bilangan negatif.

LATIHAN

Ucapkanlah kalimat-kalimat di bawah ini terlebih dahulu, kemudian renungkan artinya dan ucapkan dengan dengan kalimat biasa. Semesta pembicaraan adalah bilangan-bilangan riel.

1. $(Ax)(Ey) \,.\, y > x$
2. $(Ey)(Ax) \,.\, y > x$
3. $(Ax)(Ay) \,.\, x = y \Longleftrightarrow y = x$
4. $(Ax)(Ay) \,.\, x \neq y \Longrightarrow (Ez)((x < z \,\&\, z < y) \vee (y < z \,\&\, z < x))$
5. $(Ex)(Ay) \,.\, x + y = y + x = y$
6. $(Ax)(Ey) \,.\, x + y = y + x = 0$
7. $(Ez)(Ax)(Ay) \,.\, xy = z \Longrightarrow x = z \vee y = z$
8. $(Ax)(Ay)(Ez) \,.\, xz = y$

9. $(Ex)(Ay) \,.\, xy = x$
10. $(Ax)(Ay) \,.\, x \neq y \Longrightarrow x < y \vee y < x$
11. $(Ex) \,.\, x^2 < 0 \Longrightarrow x = 1$

2. URUTAN DARI KUANTOR-KUANTOR

Perhatikanlah kalimat $(Ex)(Ey)\, P(x,y)$ yang dapat ditulis juga $(Ex,y)\, P(x,y)$ yang diucapkan ; Ada suatu x dan ada suatu y sedemikian hingga x berada dalam relasi P dengan y. Suatu renungan sederhana meyakinkan kita bahwa kalimat di atas mempunyai arti yang sama dengan kalimat : $(Ey)(Ex)\, P(x,y)$. Maka dari itu kalimat-kalimat itu mempunyai nilai logik yang sama. Mengingat tabel dari tanda "$\Longleftrightarrow$" maka didapat :

$$(Ex)(Ey)\, P(x,y) \Longleftrightarrow (Ey)(Ex)\, P(x,y).$$

Rumus di atas tidak hanya berlaku untuk predikat tertentu "P" saja melainkan untuk setiap predikat. Untuk menyatakan hal ini digunakan "predicate-variables" yaitu huruf-huruf kecil "g" dan sebagainya. Maka dari itu terdapatlah rumus-rumus :

$(Ex)(Ey)\, g(x,y) \Longleftrightarrow (Ey)(Ex)\, g(x,y)$ demikian juga

$(Ax)(Ay)\, g(x,y) \Longleftrightarrow (Ay)(Ax)\, g(x,y)$

Rumus-rumus di atas mengatakan bahwa kuantor-kuantor sejenis boleh ditukar tempat.

Sebaliknya kalimat :

$(Ax)(Ey)\, R(x,y) \; \ldots . \; (1)$

mempunyai arti yang lain dari

$(Ey)(Ax)\, R(x,y) \; \ldots . \; (2)$

Untuk meyakini hal ini ambillah s.p. himpunan bilangan asli, sedangkan R menyatakan relasi "lebih besar". Maka kalimat pertama mengatakan tidak adanya bilangan asli terbesar sedangkan yang kedua mengatakan adanya bilangan asli terbesar. Kalimat pertama benar sedang kalimat kedua salah.

Kenyataan ini menunjukkan bahwa kuantor-kuantor yang tidak sejenis tidak selalu dapat dipertukarkan tempatnya.
Dikatakan bahwa kuantor universal dalam kalimat pertama digunakan secara distributif dan dalam bahasa sehari-hari digunakan susunan kata-kata "Untuk setiap x dapat ditemukan suatu y ...". Dalam kalimat kedua penggunaannya ialah secara kollektif dengan susunan kata-kata "Ada suatu y sedemikian hingga untuk semua x berlakulah ... "

Misalnya sekarang diambil suatu s.p. untuk mana kalimat "(Ey)(Ax) R(x,y)" menjadi benar. Umpamanya s.p. adalah himpunan bilangan alam 1 sampai dengan 10. Sedangkan R adalah relasi ≥ . Kalimat itu mengatakan adanya anggota-anggota yang lebih besar atau sama dengan anggota-anggota lainnya. Suatu kalimat yang benar karena bilangan 10 memenuhi hal ini. Akan tetapi apabila demikian, dengan sendirinya, untuk setiap anggota, dapat ditemukan anggota lainnya (umpamanya bilangan 10 tadi) yang lebih besar atau sama dengannya. Sehingga kalimat "(Ax)(Ey) R(x,y)" pun benar. Sehingga didapat :

$$(Ey)(Ax)\ R(x,y) \Longrightarrow (Ax)(Ey)\ R(x,y).$$

Dengan menggunakan predicate variables diperoleh rumus :

$$(Ey)(Ax)\ g(x,y) \Longrightarrow (Ax)(Ey)\ g(x,y)$$

Rumus ini benar-benar berlaku umum, yaitu berlaku untuk semua semesta pembicaraan dan untuk semua predikat-predikat. Sebab untuk suatu s.p. yang mengakibatkan anteseden menjadi salah (umpamanya himpunan semua bilangan asli) maka menurut definisi implikasi material, implikasinya tetap benar.

3. HUBUNGAN ANTARA KUANTOR-KUANTOR

Mengingkari bahwa semua anggota dari semesta mempunyai sifat g, adalah sama dengan mengatakan bahwa ada anggota (sekurang-kurangnya satu) yang tidak mempunyai sifat g. Sehingga "$\overline{(Ax)\ g(x)}$" dan "(Ex) $\overline{g(x)}$" bersama-sama benar dan bersama-sama salah. Jadi nilai logiknya sama. Mengingat tabel "⇐=⇒" maka

$$\overline{(Ax)\ g(x)} \Longleftrightarrow (Ex)\ \overline{g(x)}$$

Demikian juga mengingkari bahwa ada suatu anggota memiliki suatu sifat adalah sama dengan mengatakan bahwa semua anggota tidaklah memiliki sifat itu. Sehingga didapat :

$$\overline{(Ex)\ g(x)} \Longleftrightarrow (Ax)\ \overline{g(x)}$$

Perhatikan konstruksi rumus-rumus di atas yaitu setelah bentuk kiri diingkar maka kuantornya berubah jenis sedangkan tanda negasi diperpendek, yaitu masuk hanya kepada sifatnya.
Dengan mengingat rumus ini maka pekerjaan mengingkar kalimat-kalimat yang lebih kompleks dapat dilakukan secara mekanis.

Contoh : Sebagai s.p. ditentukan bilangan-bilangan alam sedangkan "G(x,y,z)" adalah terjemahan simbolis dari "z terletak di antara x dan y". Dengan mengingat aturan di atas dan mengerjakannya, langkah demi langkah, maka ingkaran dari :

$(Ax)(Ay)\ .\ x \neq y \Longrightarrow (Ez)\ G(x,y,z)$ yaitu

$$\overline{(Ax)(Ay)\ .\ x \neq y \Longrightarrow (Ez)\ G(x,y,z)}$$
$$\Downarrow$$
$$(Ex)\overline{(Ay)\ .\ x \neq y \Longrightarrow (Ez)\ G(x,y,z)}$$
$$\Downarrow$$
$$(Ex)(Ey)\ .\ \overline{x \neq y \Longrightarrow (Ez)\ G(x,y,z)}$$
$$\Downarrow$$
$$(Ex)(Ey)\ .\ x \neq y\ \&\ \overline{(Ez)\ G(x,y,z)}$$
$$\Downarrow$$
$$(Ex)(Ey)\ .\ x \neq y\ \&\ (Az)\ \overline{G(x,y,z)}$$

Ingkaran dari kalimat mula-mula mengatakan bahwa tidaklah benar bahwa pada setiap pasangan bilangan alam yang berlainan, dapat

ditemukan suatu bilangan alam yang terletak di antaranya. Sedangkan kalimat terakhir mengatakan adanya pasangan bilangan-bilangan alam sedemikian sehingga tidak ada bilangan alam yang terletak di antaranya. Perhatikanlah (renungkan) bahwa ingkaran dari kalimat mula-mula dan kalimat terakhir mempunyai arti yang sama.

4. KUANTOR YANG LAIN

Di dalam matematika masih digunakan kuantor-kuantor lainnya. Akan tetapi untuk kuantor-kuantor itu biasanya tidak diberi simbol, karena semuanya dapat dinyatakan dengan kuantor-kuantor eksistensial maupun kuantor universal. Susunan kata-kata di bawah ini merupakan suatu kekecualian :

Ada satu dan tidak lebih dari satu x yang mempunyai sifat P.

Terjemahan simbolis dari padanya ialah :

$$(Ex)\ \left[P(x)\ \&\ (Ay)(P(y) \Longrightarrow x = y)\right]$$

Yaitu, ada suatu x sedemikian hingga, x itu mempunyai sifat P dan untuk semua entitas y lainnya, apabila y mempunyai sifat p juga, maka x = y.

Susunan kata di atas amat banyak dijumpai pada pembicaraan matematika. Maka dari itu untuk kuantor inipun diadakan simbol tersendiri yaitu "$(E\,!x)$".

Kalimat di atas ditulis $(E\,!x)\ P(x)$

Diucapkan "Terdapat <u>dengan tunggal</u> satu x yang mempunyai sifat P" atau "Terdapatlah <u>tepat satu</u> x yang bersifat P".

5. KUANTIFIKASI TERBATAS

Ambillah semesta pembicaraan himpunan bilangan riel. Kita akan mencari terjemahan simbolis dari kalimat :

Ada suatu x yang positif dengan sifat P . . . . (1)

Kalimat ini mengatakan adanya suatu x yang sekaligus positif dan memiliki sifat P. Sehingga terjemahannya ialah :

$(Ex)\ .\ x > 0\ \&\ P(x)$ . . . . (1')

Sekarang diterjemahkan :

Semua x yang positif mempunyai sifat P . . . . . (2)

Jika kita berbuat analog dengan kejadian di atas menterjemahkannya dengan :

$(Ax)\ .\ x > 0\ \&\ P(x)$

maka jelas berbuat kesalahan. Sebab terjemahan terakhir ini mengatakan bahwa semua bilangan riel adalah positif dan mempunyai sifat P. Suatu hal yang terang salah. Sebaliknya suatu renungan sebentar meyakinkan kita bahwa kalimat (2) sebenarnya mengatakan : Untuk setiap x berlakulah, <u>apabila</u> x positif, maka x itu mempunyai sifat P. Sehingga terjemahannya ialah :

$(Ax)\ .\ x > 0 \Longrightarrow P(x)$ . . . . (2')

Sekarang kita singkat ekspressi-ekspressi (1') dan (2') berturut-turut menjadi :

$(Ex > 0)\ .\ P(x)$ . . . . (1")

$(Ax > 0)\ .\ P(x)$ . . . . (2")

yang dibaca berturut-turut :

Ada sesuatu x positif yang mempunyai sifat P

Untuk semua x yang positif berlakulah bahwa mereka mempunyai sifat P.

6. CONTOH-CONTOH PENGGUNAAN KUANTOR

COntoh 1. Tulislah kalimat-kalimat di bawah ini dengan bentuk simbolisme logika.

a. Ada pedagang yang suka menipu.

Kalimat ini sebenarnya mengatakan : Ada sesuatu sedemikian rupa, sehingga sesuatu itu adalah pedagang dan sesuatu itu menipu. Maka terjemahannya ke dalam simbolisme logika ialah

(Ex) . P(x) & M(x)

b. Semua mahasiswa pandai.

Ambil s.p. himpunan orang-orang. Kalimat di atas dapat diubah tanpa perubahan arti menjadi : Untuk setiap orang, apa-orang itu mahasiswa, maka orang itu pandai. Lambangnya ialah

(Ax) . M(x) ==⇒ P(x)

c. Semua ilmu adalah penting.

Lengkapnya kalimat ini adalah : Segala sesuatu, apabila sesuatu itu ilmu maka sesuatu itu adalah penting. Terjemahannya menjadi : (Ax) . I(x) ==⇒ P(x)

d. Tidak ada manusia yang tidak pernah berbohong.

Kalimat ini sama artinya dengan kalimat : Tidak benar bahwa ada manusia yang tidak pernah berbohong, jadi tak lain dari ingkaran kalimat : Ada manusia yang tidak pernah berbohong, yaitu : Semua manusia pernah berbohong. Terjemahannya ialah :

(Ax) . M(x) ==⇒ B(x)

e. Ada manusia yang berbohong, ada yang tidak.

Gunakan dua variabel x dan y sehingga terjemahannya ialah :

(Ex). M(x) & B(x) & (Ey). M(y) & $\overline{B(y)}$

f. Jeruk dan pisang bergizi.

Sangatlah keliru apabila kalimat ini ditulis dengan notasi logika sebagai berikut :

(Ax) . J(x) & P(x) ==⇒ G(x),

yang berarti bahwa semua yang bersifat jeruk dan pisang adalah bergizi. Semua orang tahu bahwa di alam semesta ini tidak ada sesuatu yang sekaligus adalah jeruk dan juga pisang.

Pernyataan di atas haruslah ditulis dengan baik sebagai berikut :

(Ax) . (J(x) v P(x) ==⇒ G(x))

Contoh 2. Tulislah kalimat-kalimat di bawah ini dalam kalimat Indonesia. (D = dagangan, L = laku)

a. ~(Ax) . D(x) ==⇒ L(x)

Tidak semua dagangan laku

b. (Ax) . ~(D(x) ==⇒ L(x))

Semua dagangan tidak laku

c. ((Ax) . (D(x) ==⇒ L(x)) ⇐=⇒ (~(Ex) . ~(D(x) & L(x))

Mengatakan bahwa semua dagangan laku sama dengan mengatakan bahwa tidak benar ada dagangan yang tidak laku.

Contoh 3. Semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan-bilangan riel. Tentukan nilai logikanya kalimat-kalimat berikut.

a. (Ax). 2x+1 =2x. Salah, misalnya untuk x = 1 maka 2.1 + 1 ≠ 2.1

b. (Ax). |x| = x. Salah, karena ada x misalnya -5 di mana |-5| ≠ -5

c. (Ex). x^2 = x. Benar, ambil x = 1 maka 1^2 = 1

LATIHAN

1. Terjemahkanlah masing-masing kalimat di bawah ini ke dalam notasi logika. Huruf yang digaris bawahi digunakan sebagai singkatan dari sifat yang diberikan. Gunakan kuantor.

a. Ulat adalah serangga.

b. Tidak semua serangga berbisa.

c. Anak-anak hadir

d. Tidak semua yang mengkilat adalah emas.
e. Tidak ada barang sesuatu di rumah yang luput dari karusakan.
f. Ada mahasiswa yang cerdik dan kuat bekerja.
g. Tidak ada jas yang kedap air kecuali ditangani secara khusus
h. Ada obat yang berbahaya, hanya apabila dipakai dalam dosis yang berlebihan.
i. Semua buah-buahan dan sayuran adakah sehat dan bergizi.
j. Setiap kuda yang jinak terlatih baik
k. Setiap kuda adalah jinak jika dan hanya jika ia terlatih baik
l. Kuda-kuda yang jinak, semuanya terlatih baik.

2. Terjemahkanlah kalimat-kalimat di bawah ini ke dalam kalimat Bahasa Indonesia yang baik dan benar.

a. ~ (Ax) . D(x) ==> L(x)
b. (Ax) . ~ (D(x) ==> L(x))
c. ~ (Ex) .~ (D(x) & L(x))
d. (Ex) . ~ (D(x) & L(x))
e. ~ (Ax) .~ (D(x) ==> L(x))
f. (Ex) . (E(x) & L(x)).v. (Ax) . ~ (D9x) ==> L(x))
g. '(Ax) . (D(x) ==> L(x)) <==> ~ (Ex) . ~ (D(x) & L(x))
h. ~ (Ax) . (D(x) & L(x)) & (D(x) & L(x))
i. (Ex) . ~ (D(x) & L(x)) v (A(x) . ~ (D(x) ==> L(x))
j. (~ (Ax).~ (D(x) ==> L(x)) v ~ (Ax) . (D(x) ==> L(x))

3. Semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan riel. Tentukan nilai logiknya kalimat-kalimat di bawah ini :

a. (Ex) . |x| = 0
b. (Ex) . |x| = x
c. (Ax) . x^2 = x
d. (Ex) . $x^2 + 3x - 2 = 0$
e. (Ax) . $x - 3 < x$
f. (Ax) . $2x + 3x = 5x$

4. Semesta pembicaraan adalah bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4 dan 5. Tentukan nilai logik kalimat-kalimat di bawah ini.

a. (Ex). $x + 1 < 5$
b. (Ax) . $x \leq 5$
c. (Ax) . $x + 4 < 10$
d. (Ex) . $x + 2 = 7$
e. (Ax)(Ay) . $x + y \leq 10$
f. (Ey)(Ax) . $x + y = 10$
g. (Ey)(Ax) . $x y = x$
h. (Ax)(Ey) . $x + y = 10$

5. Ingkarilah kalimat-kalimat di bawah ini.

a. Apabila guru tidak hadir maka semua murid bergembira.
b. Ada buruh yang tidak bekerja apabila mandor tidak hadir.
c. Beberapa guru bersedih apabila ada murid yang tidak lulus.
d. (Ex > 0) P(x)
e. (Ax > 0) P(x)
f. Sekurang-kurangnya ada dua x yang mempunyai sifat P. (Tuliskanlah dahulu kalimat ini dengan simbol logika, kemudian ingkarilah dan terjemahkan).

6. Terjemahkanlah kalimat-kalimat di bawah ini, kemudian renungkan artinya masing-masing. Jika kalimat-kalimat itu menyatakan hal yang sama, tuliskanlah artinya dalam kalimat singkat.

a. (Ax)(Ay) . P(x) & P(y) ==> x = y
b. (Ax)(Ay) . $x \neq y$ ==> P(x) v P(y)
c. (Ax)(Ay) . $x \neq y$ ==> [P(x) ==> P(y)]
d. (Ex)(Ey) . P(x) & P(y) & $x \neq y$

III. B E N T U K - B E N T U K   A R G U M E N

1. ARGUMEN

Argumen atau dalih ialah sekumpulan pernyataan di mana satu di antaranya ditetapkan atas dasar dari yang lainnya yang dianggap cukup memberikan alasan bagi kebenaran dari yang satu tersebut. Setiap argumen mempunyai suatu struktur, terdiri atas premis-premis dan konklusi (kesimpulan). Yang dimaksud dengan konklusi suatu argumen ialah pernyataan yang ditegaskan berdasarkan pernyataan-pernyataan lainnya dari argumen tersebut; sedangkan pernyataan-pernyataan lainnya itu yang dianggap sebagai memberikan alasan untuk menerima konklusi tersebut adalah premis-premis dari argumen tersebut.

Contoh :

1. Setiap manusia fana.
2. Socrates seorang manusia.
3. Socrates fana.

Pada contoh ini, (1) dan (2) disebut premis, sedangkan (3) yang ditegaskan dari (1) dan (2) disebut konklusi (kesimpulan).

Kalau penalaran itu proses aktivitas pikiran yang abstrak, maka argumen adalah lambangnya yang berbentuk bahasa. Jadi, kalau kata itu merupakan lambang pengertian, kalimat itu lambang situasi atau fakta atau peristiwa, maka argumen adalah lambang penalaran.

Jika terhadap suatu pernyataan diberi nilai "benar" dan nilai "salah" maka kepada suatu argumen dipakai nilai "sah" dan "tidak sah". Kedua macam penilaian ini tidak mempunyai kaitan antara satu dan lainnya, karena suatu argumen mungkin saja sah, sekalipun pernyataan-pernyataan yang membentuknya tidak semuanya benar, seperti yang kelihatan pada contoh berikut ini.

Contoh :

1. Setiap hewan mempunyai sayap.
2. Kucing adalah hewan.
3. Hucing mempunyai sayap.

Pada argumen ini hanya premis kedua yang benar, premis pertama dan konklusinya salah. Namun demikian, argumen ini sah.

konklusi = pernyataan yg ditegaskan berdasarkan pernyataan² lainnya
Premis : pernyataan² yg menyatakan alasan² utk menyimpulkan konklusi
1. Setiap manusia fana
2. Socrates seorang manusia } premis
3. Socrates fana : konklusi

Sebaliknya pula, sekalipun setiap kalimat di dalam suatu argumen benar, mungkin saja argumen itu tidak sah. Hal itu ditunjukkan oleh argumen berikut

Contoh :

1. Jumlah sudut-sudut suatu segitiga adalah 180°.
2. Jajaran genjang adalah suatu segi empat.
3. π bukanlah suatu bilangan rasional.

Ketiga kalimat di dalam argumen ini adalah benar, tetapi argumen ini tidak sah. Sepintas lalu tampak oleh kita bawa (3) sama sekali tidak ada kaitannya dengan (1) dan (2).

Dari kedua contoh di atas tampak bahwa kedua konsep "benar" dan "salah" tidak ada hubungannya dengan kedua konsep "sah" dan "tidak sah".

Kata : lambang pengertian
Kalimat : lambang situasi (fakta)
Argumen : lambang penalaran.

Perhatikanlah kembali argumen

1. Setiap manusia fana.
2. Socrates seorang manusia.
3. Sokrates fana.

Jika kedua premis dan konklusinya dirangkaikan, maka argumen tersebut dapat dinyatakan oleh suatu kalimat deklaratif komposit, sebagai berikut :

(α) Jika setiap manusia fana, dan Socrates seorang manusia, maka Socrates fana.

Jika kita nyatakan "manusia" dengan "U", "fana" dengan "T" dan "Socrates" dengan "U", maka kita peroleh suatu kerangka sebagai berikut :

(α*) Jika setiap S adalah T, dan U suatu S. maka U adalah T.

Penilaian terhadap pernyataan = T-F
—"— thd Argumen = Sah-tak Sah
Sahi - tak sahi
Valid - tdk Valid

Jika sekarang untuk S kita substitusikan "mahasiswa", untuk T "pandai" dan untuk U "Buyung" maka kita peroleh suatu argumen sebagai berikut :

(β) Jika setiap mahasiswa pandai, dan Buyung seorang mahasiswa, maka Buyung pandai.

1. Setiap hewan mempunyai sayap } premis
2. kucing adalah hewan
3. Kucing mempunyai sayap : konklusi

Jika ke dalam (α*), untuk S disubstitusikan "penumpang", untuk T "tewas", dan untuk U "Walikota", maka akan kita peroleh suatu argumen sebagai berikut :

(γ) Jika setiap penumpang tewas, dan Walikota salah seorang penumpang, maka Walikota tewas.

Tampak jelas bahwa argumen-argumen (α), (β) dan (γ) adalah sah dan semuanya memiliki bentuk/struktur yang sama; dan itulah sebabnya maka ketiganya mempunyai keabsahan yang sama, yaitu ketiganya sah. Dan struktur ketiga argumen tersebut diberikan oleh (α*) yang kita sebut kerangka/struktur suatu argumen. Dua argumen yang mempunyai struktur yang samaakan sama pula dalam keabsahannya, yaitu keduanya sama-sama sah atau keduanya sama-sama tak sah. Yang menjadi bahan kajian dalam logika ialah struktur atau bentuk bentuk ini, yaitu bentuk-bentuk argumen. Dan salah satu definisi Logika (dan Matematika) ialah bahwa Logika dan matematika adalah studi mengenai struktur atau bentuk-bentuk (Mathematics is the study of structures).

Kalimat-kalimat dalam argumen dapat berbeda dari satu argumen ke argumen lainnya. Namun jika bentuknya sama, maka keabsahannyapun akan sama pula.

Untuk mendefinisikan "bentuk argumen" secara lebih tepat, kita anggap huruf-huruf kecil p, q, r, . . . sebagai variabel-variabel kalimat untuk mana dapat disubstitusikan kalimat-kalimat konstan. Dan suatu bentuk argumen kita definisikan sebagai suatu rentetan lambang-lambang yang mengandung variabel-variabel kalimat demikian, sehingga, jika disubstitusikan kalimat-kalimat konstan bagi variabel-variabel tersebut, hasilnya adalah suatu argumen.

Jika U singkatan dari kalimat : Pembuangan sampah harus dilakukan di tempat-tempat tertentu, dan V singkatan kalimat : Tindakan yang lebih tegas harus segera diambil, maka akan diperoleh suatu argumen sebagai berikut :

Sebaliknya : mungkin semua kal. bernilai Benar tetapi argumentasi itu tak sah
1. Jumlah sudut² segitiga adalah 180°. (T)
2. Jajaran genjang adalah suatu segi-empat (T)
3. π bilangan bil. rasional (T)
Semua pernyataan ini benar T (ttp argumen ini tak sah.
[illegible]

Pembuangan sampah harus dilakukan pada tempat-tempat tertentu, atau tindakan yang lebih tegas harus segera diambil. Pembuangan sampah tidak dilakukan di tempat-tempat tertentu. Maka, oleh karena itu, tindakan yang lebih tegas harus segera diambil.

Argumen ini mempunyai bentuk :

(1) U v V

(2) $\bar{U}$

(3) ∴ V

Istilah "sah" dan "tidak sah" dapat sekarang diluaskan kepada bentuk-bentuk argumen, sebagai berikut : Suatu bentuk argumen adalah tak sah jika ia suatu bentuk argumen yang mempunyai setidak-tidaknya satu hal substitusi dengan premis-premis yang benar dan konklusi yang salah. Dan setiap argumen dapat dibuktikan sah jika dapat ditunjukkan dengan menyelidiki semua kemungkinan substitusinya yaitu dengan menggunakan tabel nilai. Kita harus menyelidiki semua substitusi untuk mengetahui apakah terdapat suatu substitusi untuk mana premis-premis argumen semuanya benar tetapi konklusinya salah. Perhatikanlah penyelidikan keabsahan bentuk Sillogisme Disjungtif berikut ini :

p v q

$\bar{p}$

∴ q

Kita susun suatu tabel sebagai berikut :

p	q	p v q	$\bar{p}$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	T ✓
F	F	F	T

Setiap baris dari tabel ini mewakili suatu kelas hal-hal substitusi. T dan F di dalam kedua kolom pertama mewakili nilai-nilai kebenaran kalimat-kalimat yang dapat disubstitusikan bagi p dan q di dalam argumen tersebut. Ini akan menentukan nilai-nilai kebenaran dalam kolom ketiga dan keempat yang merupakan premis-premis argumen. Kolom kedua adalah konklusi argumen tersebut. Suatu penyelidikan terhadap tabel ini mengungkapkan bahwa satu-satunya baris di mana kedua premis bernilai T dan konklusi juga bernilai T adalah baris ketiga. Ini berarti bahwa Sillogisme Disjungtif di atas adalah suatu argumen yang sah.

LATIHAN

Pakailah tabel kebenaran untuk men-tes keabsahan bentuk-bentuk argumen berikut ini :

1. $p \& q$; $\therefore p$

2. p ; $\therefore p \& q$

3. $p \vee q$; $\therefore p$

4. p ; $\therefore \bar{p}$

5. p ; $\therefore p \Longrightarrow q$

6. p ; $\therefore q \Longrightarrow p$

7. $p \Longrightarrow q$; $\therefore \bar{p} \Longrightarrow \bar{q}$

8. $p \Longrightarrow q$; $\therefore \bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$

9. $p \Longrightarrow (q \& r)$; $\therefore (q \& r) \Longrightarrow \bar{p}$

10. $p \vee q$; p ; $\therefore$

11. p ; q ; $\therefore p \& q$

12. $p \Longrightarrow q$; $q \Longrightarrow r$; $\therefore p \Longrightarrow \bar{r}$

13. $p \Longrightarrow q$; p ; $\therefore q$

14. $p \Longrightarrow q$; $\bar{q}$; $\therefore \bar{p}$

15. $p \Longrightarrow q$; $q \Longrightarrow r$; $\therefore p \Longrightarrow r$

2. BUKTI FORMAL KEABSAHAN ARGUMEN

Kita maklum bahwa pembuktian keabsahan suatu bentuk argumen yang mengandung banyak variabel melalui tabel nilai adalah kurang praktis. Lagi pula, cara yang demikian tidak akan memupuk pandangan kita tentang hubungan antara argumen-argumen; hal ini dikarenakan cara tersebut hanya bekerja sebagai mesin tanpa menambah pengetahuan. Misalnya untuk pembuktian suatu argumen yang terdiri dari 5 variabel, kita memerlukan tabel yang besar yang memuat $2^5 = 32$ baris. Sungguh merupakan suatu pekerjaan yang amat menjemukan untuk memeriksa keabsahan argumen itu baris demi baris.

Ada suatu cara yang lebih baik dan lebih singkat, di samping suatu cara yang mendidik, yaitu kita lakukan tes keabsahan tersebut melalui sekumpulan argumen-argumen kecil yang skemanya terlebih dahulu kita kuasai.

Di bawah ini disajikan beberapa bentuk argumen pokok yang sah.

ATURAN-ATURAN PENYIMPULAN

1. Modus Ponens (MP)
   $p \Longrightarrow q$
   p
   $\therefore q$

2. Modus Tollens (MT)
   $p \Longrightarrow q$
   $\bar{q}$
   $\therefore \bar{p}$

3. Hypothetical Syllogism (HS)
   $p \Longrightarrow q$
   $q \Longrightarrow r$
   $\therefore p \Longrightarrow r$

4. Disjunctive Syllogism (DS)
   $p \vee q$
   $\bar{p}$
   $\therefore q$

5. Constructive Dilemma (CD)
   $(p \Longrightarrow q) \& (r \Longrightarrow s)$
   $p \vee r$
   $\therefore q \vee s$

6. Destructive Dilamma (DD)
   $(p \Longrightarrow q) \& (r \Longrightarrow s)$
   $\bar{q} \vee \bar{s}$
   $\therefore \bar{p} \vee \bar{r}$

7. Simplification (Simp)

$p \,\&\, q$

$\therefore p$

8. Addition (Add)

p

$\therefore p \vee q$

9. Conjunction

p

q

$\therefore p \,\&\, q$

Keabsahan semua bentuk argumen di atas dapat diperiksa dengan memakai tabel nilai seperti telah dikemukakan sebelumnya, namun dapat pula dilihat bahwa semua bentuk itu tidak lain dari pada tautologi.

Ambil misalnya Modus Ponens. Bentuk argumen ini tidak lain dari pada bentuk tautologi $(p \Rightarrow q) \,\&\, p \Rightarrow q$.
Bentuk Constructive Dilemma (CD) tidak lain dari pada tautologi $(p \Rightarrow q) \,\&\, (r \Rightarrow s) \;.\!\Rightarrow.\; (q \vee s)$, dan seterusnya.

Contoh-contoh penyimpulan

1. Buktikanlah argumen berikut :

   1. $p \vee (q \Rightarrow s)$
   2. $\bar{r} \Rightarrow (s \Rightarrow t)$
   3. $p \Rightarrow r$
   4. $r \;/ \therefore q \Rightarrow t$
   5. $\bar{p}$ 3, 4 MT
   6. $q \equiv s$ 1, 5 DS
   7. $s \Rightarrow t$ 2, 4 MP
   8. $q \Rightarrow t$ 6, 7 HS

2. Buktikanlah argumen berikut :

   1. $(p \Rightarrow \bar{q}) \,\&\, (\bar{r} \Rightarrow s) \;/ \therefore p \Rightarrow \bar{q}$
   2. $\bar{r} \Rightarrow s$ 1, Simp.
   3. $p \Rightarrow \bar{q}$ 1, Simp.

3. Buktikanlah argumen berikut :

   1. $p \vee (q \vee r) \;/ \therefore (p \vee (q \vee r)) \vee (k \vee (q \vee r))$
   2. $(p \vee (q \vee r)) \vee (k \vee (q \vee r))$

4. Buktikan

   1. $(v \Rightarrow w) \vee (x \Rightarrow y)$
   2. $\overline{(v \Rightarrow w)} \;/ \therefore x \Rightarrow y$
   3. $x \Rightarrow y$ 1, DS

LATIHAN

Buktikanlah argumen-argumen berikut :

1. 1. $((j \,\&\, k) \Rightarrow i) \,\&\, (m \Rightarrow \bar{n})$
   2. $(j \,\&\, k) \vee m \;/ \therefore \bar{i} \vee \bar{n}$

2. 1. $c \Rightarrow \bar{p}$
   2. $\bar{p} \Rightarrow q \;/ (c \Rightarrow \bar{p}) \,\&\, (\bar{p} \Rightarrow q)$

3. 1. $((v \,\&\, \bar{w}) \Rightarrow x) \,\&\, (w \,\&\, \bar{y}) \;/ \therefore x \vee z$

4. 1. $a \Rightarrow b$
   2. $c \Rightarrow d$
   3. $(\bar{b} \vee \bar{d}) \,\&\, (\bar{a} \vee \bar{b}) \;/ \therefore \bar{a} \vee \bar{c}$

5. 1. $e \Rightarrow (\bar{f} \,\&\, \bar{g})$
   2. $(f \vee g) \Rightarrow h$
   3. $e \;/ \therefore h$

6. 1. $p \,\&\, q$
   2. $(p \vee r) \Rightarrow s \;/ \therefore p \,\&\, s$

7. 1. $\overline{(p \,\&\, q)} \Rightarrow \bar{r}$
   2. $s \,\&\, r \;/ \therefore p \,\&\, q$

8. 1. $p \Rightarrow \bar{q}$
   2. $\bar{q} \Rightarrow \bar{r}$
   3. $s \,\&\, r \;/ \therefore \bar{p}$

Susunlah bukti formal keabsahan argumen-argumen berikut :

9. Abdul menghadiri pertemuan atau Abdul tidak diundang pada pertemuan. Jika para direktur memerlukan Abdul pada pertemuan, maka ia akan diundang pada pertemuan. Abdul tidak menghadiri pertemuan. Jika para direktur tidak menginginkan Abdul pada pertemuan, maka Abdul akan keluar dari perusahaan. Oleh karena itu Abdul akan keluar dari perusahaan.

10. Jika barang berkurang, maka harga akan naik. Jika ada perubahan dalam pemerintahan, maka pengawasan pajak tidak akan diteruskan. Jika ancaman inflasi mendesak, maka pengawasan pajak akan diteruskan. Jika produksi naik, maka harga tidak tidak akan naik. Ada kenaikan produksi atau ada perubahan dalam pemerintahan. Oleh karena itu, kehilangan barang tidak akan berlarut, atau inflasi tidak akan mendesak.

11. Jika pemeriksaan berlanjut, maka bukti baru akan ditunjukkan. Jika bukti baru ditunjukkan, maka beberapa warga kota penting akan terlibat. Jika beberapa warga kota penting terlibat maka surat kabar akan berhenti mengumumkan perkara ini. Jika kelanjutan pemeriksaan membawakan bahwa surat kabar menghentikan pengumuman perkara ini, maka penunjukan bukti baru membawakan bahwa penyelidikan berlanjut. Penyelidikan tidak berlanjut. Oleh karena itu, bukti baru tidak akan ditunjukkan.

12. Jika Ali hadir, maka Badu hadir ; dan jika Badu hadir, maka Hasan tidak hadir. Jika Hasan hadir, maka Karim tidak hadir. Jika Badu hadir, maka Emran tidak hadir. Jika Karim tidak hadir maka Usman tidak hadir. Oleh karena itu, Ali tidak hadir, atau Hasan tidak hadir.

13. Jika Ali menerima pesan, maka dia akan memesan pesawat. Tetapi jika Ali tidak mengambil pesawat, maka Ali akan kehilangan pertemuan. Jika Ali kehilangan pertemuan, maka Badu akan terpilih. Dan, jika Badu terpilih, maka Ali menerima pesan. Jika Ali tidak kehilangan pertemuan, atau Ali tidak menerima pesan, maka Ali tidak mengambil pesawat, atau Badu tidak terpilih. Ali tidak kehilangan pertemuan. Oleh karena itu, Ali tidak menerima pesan, atau Ali tidak kehilangan pertemuan.

14. Pajak dinaikkan atau jika pengeluaran naik, maka plafon hutang akan naik. Jika pajak dinaikkan, maka biaya pungutan pajak juga naik. Jika kenaikan pengeluaran mengakibatkan bahwa pemerintah akan meminjam uang lebih banyak, maka jika plafon hutang dinaikkan maka juga bunga uang akan naik pula. Jika pajak tidak dinaikkan, maka biaya pungutan pajak tidak akan naik. Jika plafon hutang dinaikkan, pemerintah akan meminjam lebih banyak uang. Biaya pungutan pajak tidak naik. Bunga uang tidak naik atau pemerintah tidak akan meminjam uang lebih banyak. Oleh karena itu, plafon hutang tidak akan naik atau pengeluaran tidak akan naik.

Buatlah kesimpukan dengan menggunakan semua ketentuan yang diberikan pada soal-soal berikut ini.

15. Apabila gaji-gaji naik dan harga-harga naik maka terjadi inflasi. Apabila terjadi inflasi maka pemerintah akan jatuh. Gaji-gaji memang naik tetapi pemerintah tidak jatuh.

16. Apabila Slamat Gundul dimasukkan ke penjara dan ia cerdik maka ia akan dapat meloloskan diri atau ia akan menterror penjaga. Apabila ia meloloskan diri maka ia pasti telah menterror para penjaga. Slamat Gundul tertangkap dan ia dimasukkan ke penjara dan tidak meloloskan diri.

17. Jika dia pergi piknik maka dia memakai pakaian sport. Jika dia memakai pakaian sport, maka dia tidak akan menghadiri pesta. Jika dia tidak menghadiri pesta, maka dia masih memiliki karcis. Tetapi dia tidak memiliki karcis. Dia menghadiri pesta.

18. Jika saya bekerja, maka saya mendapat uang, tetapi jika saya malas, saya akan bersenang-senang. Saya bekerja atau saya malas. Tetapi jika saya bekerja, maka saya tidak akan bersenang-senang, sedangkan jika saya malas, saya tidak akan mendapat uang.

IV. METODE PEMBUKTIAN

Setiap sistem dalam matematika sebagai ilmu aksiomatis terdiri dari sekumpulan pengertian-pengertian (yaitu pengertian pangkal dan pengertian bukan pangkal) dan sekumpulan pernyataan-pernyataan (yaitu pernyataan pangkal dan pernyataan bukan pangkal). Pengertian pangkal (pengertian primitif) merupakan pengertian yang tidak didefinisikan, namun dianggap dimengerti dengan jelas oleh setiap orang. Sedangkan pengertian bukan pangkal adalah pengertian yang dijelaskan melalui definisi dengan menggunakan pengertian-pengertian pangkal. Pernyataan pangkal yang disebut juga aksioma, merupakan pernyataan-pernyataan tentang pengertian-pengertian pangkal yang diterima kebenarannya dengan jelas atau diberi nilai benar tanpa bukti. Sedangkan pernyataan bukan pangkal yang disebut teorema atau dalil atau hukum adalah pernyataan-pernyataan tentang sifat-sifat dan relasi-relasi antara pengertian-pengertian yang kebenarannya harus dibuktikan secara deduktif. Teorema. Jadi teorema merupakan pernyataan yang diturunkan dari aksioma atau teorema yang telah dibuktikan sebelumnya.

Di dalam pembicaraan tentang tautologi telah disebutkan bahwa tautologi merupakan hukum-hukum logika dan merupakan hukum-hukum berpikir manusia yang paling jernih. Untuk membuktikan suatu teorema dalam matematika diperlukan kerangka berpikir yang logis. Suatu bukti dikatakan sahih (valid) apabila ada tautologi yang mendukung benarnya jalan pemikiran tersebut. Jadi adanya tautologi yang dapat ditunjuk untuk mendukung jalan pikiran itu merupakan yustifikasi bukti yang dilakukan.

Di dalam membicarakan tautologi telah diberikan beberapa metode pembuktian. Namun pada bagian ini metode pembuktian akan diperinci lebih lanjut. Metode pembuktian dimaksud, berlaku untuk setiap pembuktian dalam cabang manapun dari matematika. Bagian ini menjadi sangat penting karena menjadi landasan bagi semua bukti yang digunakan. Pada pembuktian teorema tidak disebut lagi landasan berpikirnya tetapi langsung digunakan suatu tautologi tertentu. Memahami suatu bukti, atau mengerjakan suatu pembuktian akan lebih sukar apabila metode-metode pembuktian belum dipahami benar-benar.

1. BUKTI KALIMAT $P \Rightarrow Q$

Untuk teorema dalam bentuk ini, dengan menganggap P diketahui, jadi bernilai benar, diturunkan dengan langkah-langkah logis Q. Artinya dengan diketahuinya P (dianggap sebagai aksioma sementara) dan dengan menggunakan aksioma-aksioma dan teorema-teorema yang sudah ada diturunkan kalimat Q. Apabila hal ini dapat dilakukan maka bukti telah selesai. Di sini benarnya Q tidak perlu ditunjukkan, yang ditunjukkan ialah Q benar apabila P benar. Apakah P benar adalah masalah lain; juga apakah Q benar adalah masalah lain. Yang dibuktikan benar adalah kalimat $P \Rightarrow Q$.
Untuk menjelaskan ini, andaikan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ adalah aksioma-aksioma dan teorema-teorema yang telah dibuktikan. Untuk membuktikan $P \Rightarrow Q$ adalah usaha untuk menunjukkan bahwa dari $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ dapat diturunkan $P \Rightarrow Q$ suatu argumen yang sahih.
Untuk melakukannya, andaikan P suatu aksioma dan dtunjukkan bahwa dari : $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, P dapat diturunkan Q.

Contoh :

Buktikan : a bilangan genap $\Rightarrow a^2$ bilangan genap.

Bukti : Andaikan a bilangan genap, maka $a = 2k$ untuk k bulat sehingga $a^2 = 2(2k^2)$, sedang $2k^2$ adalah bilangan bulat. Jadi a^2 bilangan genap.

Pada bukti di atas kita menggunakan tautologi :

$((P \Rightarrow S_1) \wedge (S_1 \Rightarrow S_2) \wedge \ldots \wedge (S_n \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ yaitu :

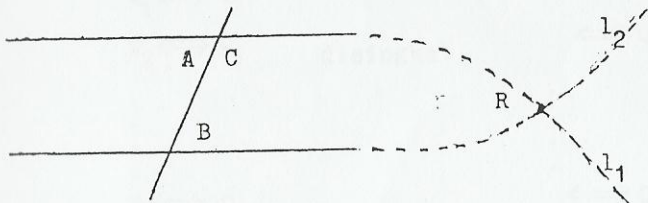
a genap $\Rightarrow a = 2k \Rightarrow a^2 = 2(2k^2) \Rightarrow a^2$ genap

$\therefore$ a genap $\Rightarrow a^2$ genap.

Contoh lain untuk bukti kondisional ini ialah teorema berikut : Tiap kalimat dalam bentuk $\forall x P(x) \quad \exists x P(x)$ adalah benar.
Bukti : Andaikan $\forall x P(x)$ benar. Maka himpunan penyelesaian untuk P(x) adalah semesta pembicaraan. Jika semesta pembicaraan tidak kosong maka kalimat $\exists x P(x)$ benar.

2. BUKTI DENGAN KONTRA POSISI

Membuktikan kalimat $P \Rightarrow Q$ sama dengan membuktikan kontra posisinya yaitu $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Tautologi yang menukungnya ialah $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$. Oleh karena suatu implikasi ekuivalen (jadi bernilai sama) dengan kontra posisinya, maka apabila kontra posisi dapat dibuktikan maka bukti untuk kalimat aslinya telah selesai. Untuk pembuktian seperti ini, ingkaran dari konsekuen yaitu $\overline{Q}$ dianggap diketahui (dipandang sebagai aksioma sementara) dan dari sini diturunkan $\overline{P}$ yaitu ingkaran dari anteseden. Apabila usaha uni berhasil maka pembuktian telah selesai.

Contoh : Contoh ini diambil dari Geometri Euclides.

Buktikan : $\angle A = \angle B \Rightarrow l_1 \cap l_2 = \emptyset$

Bukti : Dengan kontra posisi akan dibuktikan

$$l_1 \cap l_2 \neq \emptyset \Rightarrow \angle A \neq \angle B.$$

Andaikan $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$, yaitu l_1 dan l_2 berpotong di R. Maka RCB adalah segitiga, sehingga $\angle C + \angle B + \angle R = 180^o$. Juga $\angle A$ dan $\angle C$ berpelurus (bersuplemen). Karena sudut-sudut suatu segitiga adalah positip maka $\angle R > 0$, maka $\angle B < \angle A$ atau $\angle A \neq \angle B$. Bukti selesai.

3. BUKTI UNTUK KALIMAT BERBENTUK $P \Leftrightarrow Q$

Akan diperlihatkan tiga bentuk untuk membuktikan kalimat berbentuk $P \Leftrightarrow Q$.

3.1. Dibuktikan $P \Rightarrow Q$ dan $Q \Rightarrow P$ karena $P \Leftrightarrow Q$ ekuivalen dengan $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Ada dua langkah untuk untuk membuktikan kalimat seperti ini.

a. Buktikan $P \Rightarrow Q$, yaitu membuktikan bagian "hanya jika" atau "syarat cukup".

b. Buktikan $Q \Rightarrow P$, yaitu membuktikan bagian "jika" atau "syarat perlu".

Tiap kalimat ini adalah implikasi yang dapat dibuktikan dengan cara yang telah dikemukakan di atas.

Contoh : Buktikan, bilangan riel a dan b adalah akar-akar persamaan $x^2 + px + q = 0$ bila dan hanya bila $a + b = -p$ dan $ab = q$.

Bukti :

a. Membuktikan "hanya jika" atau "syarat cukup".
Dibuktikan : jika a dan b akar-akar persamaan $x^2 + px + q = 0$ maka $a + b = -p$ dan $ab = q$.
Dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat diketahui bahwa

$$a = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{dan} \quad b = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

sehingga $a + b = -p$ dan $ab = q$.

b. Membuktikan "jika" atau "syarat perlu".
Dibuktikan : jika $a + b = -p$ dan $ab = q$ maka a dan b adalah akar-akar persamaan $x^2 + px + q = 0$.
Kembali dengan menggunakan bukti kondisional, andaikan $a + b = -p$ dan $ab = q$, maka $b = -p - a$ sedang $q = ab = a(-p - a) = -ap - a^2$.
Sehingga $a^2 + pa + q = 0$. Jadi a adalah akar persamaan $x^2 + px + q = 0$.
Dengan jalan sama diperlihatkan bahwa b juga akar persamaan itu.

3.2. Dibuktikan $P \Rightarrow Q$ dan $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$.
$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ dibuktikan dengan membuktikan $P \Rightarrow Q$ lebih dahulu kemudian membuktikan $Q \Rightarrow P$ dengan menggunakan kontra posisinya yaitu $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$.
Sebagai contoh, andaikan akan dibuktikan a genap bhb a^2 genap.

Kalimat yang akan dibuktikan ialah

a) a genap $\Rightarrow a^2$ genap

b) a tidak genap $\Rightarrow a^2$ tidak genap

(a ganjil $\Rightarrow a^2$ ganjil)

Bukti untuk kedua hal ini mudah dilakukan.

3.3. $P \Leftrightarrow Q$ dibuktikan dengan untaian (rangkaian) <u>bhb</u> atau rangkaian ekuivalensi, yaitu menyusun kalimat-kalimat yang ekuivalen yang membawa P ke Q, sebagai berikut :

$P \Leftrightarrow Q_1$		$P \Leftrightarrow Q_1$
$Q_1 \Leftrightarrow Q_2$		$\Leftrightarrow Q_2$
$Q_2 \Leftrightarrow Q_3$	disingkat	$\Leftrightarrow Q_3$
$\vdots$		$\vdots$
$Q_n \Leftrightarrow Q$		$\Leftrightarrow Q$

Yustifikasi untuk bukti ini ialah tautologi :

$$((P \Leftrightarrow Q_1) \wedge (Q_1 \Leftrightarrow Q_2) \wedge \ldots \wedge (Q_n \Leftrightarrow Q)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

Contoh : Buktikan, tiap kalimat dalam bentuk Ax.Ay.P(x,y) Ay.Ax.P(x,y) adalah benar.

Bukti : Dengan menggunakan untaian ekuivalensi diperoleh Ax.Ay.P(x,y) adalah benar untuk setiap penggantian x dan y dengan konstan a dan b dari semestanya, P(a,b) benar. Rangkaian ekuivalensi dimaksud adalah

Ax.Ay.P(x,y) adalah benar $\Leftrightarrow$ untuk setiap oenggantian x dan y dengan konstan a dan b dari semestanya P(a,b) benar.

$\Leftrightarrow$ untuk setiap penggantian y dan x dengan konstan a dan b dari semestanya P(a,b) benar.

$\Leftrightarrow$ Ay.Ax.P(x,y) benar.

Mungkin juga bukti dengan rangkaian ekuivalensi terdiri atas dua rangkaian implikasi, yaitu

$$P \Rightarrow Q_1,\ Q_1 \Rightarrow Q_2,\ \ldots,\ P_n \Rightarrow Q \text{ dan}$$

$$Q \Rightarrow S_1,\ S_1 \Rightarrow S_2,\ \ldots,\ S_k \Rightarrow P$$

4. MEMBUKTIKAN KALIMAT DALAM BENTUK AxP(x)

Untuk membuktikan AxP(x), ambil x mewakili anggota sembarang dari semesta pembicaraan dan dibuktikan P(x) benar. Oleh karena x anggota sembarang dari semesta, maka jelas berlaku untuk setiap elemen dari semesta, atau AxP(x) benar.

Contoh :

Af (f differensiabel $\Rightarrow$ f kontinu).

Untuk membuktikan kalimat ini, ambil f fungsi sembarang dan dibuktikan f differensiabel $\Rightarrow$ f kontinu. Dengan menggunakan bukti kondisional, andaikan f differensiabel dan buktikan f kontinu. Buktinya disajikan dalam Kalkulus.

Apabila f differensiabel $\Rightarrow$ f kontinu telah dibuktikan, maka telah terbukti pula

Af (f differensiabel $\Rightarrow$ f kontinu)

karena f diambil fungsi sembarang.

Contoh : Buktikan, Ax($1 < x \Rightarrow 1 < x^2$) untuk semesta $\{2, 3\}$

Dengan melakukan substitusi diperoleh

$1 < 2 \Rightarrow 1 < 2^2$ dan $1 < 3 \Rightarrow 1 < 3^2$, keduanya benar.

Dengan demikian, kalimat Ax($1 < x \Rightarrow 1 < x^2$.

Contoh : Buktikan Ax ($1 < x \Rightarrow 1 < x^2$) untuk himpunan semua bilangan asli.

Bukti : Mencoba membuktikan dengan substitusi setiap bilangan asli, suatu hal yang tak mungkin.

Untuk membuktikannya ambil x bilangan asli sembarang dan buktikan $1 < x \Rightarrow 1 < x^2$.

Andaikan $1 < x$. Karena $1 > 0$ maka $x > 0$.

Sehingga dari $1 < x$ dan $x > 0$ berakibat $1 . x < x . x$.

Jadi $1 < x$ dan $x < x^2$ berimplikasi $1 < x^2$.

Karena $1 < x \Rightarrow 1 < x^2$ untuk x bilangan asli sembarang maka Ax ($1 < x \Rightarrow 1 < x^2$).

5. BUKTI DENGAN KASUS

Bukti jenis seperti ini digunakan untuk membuktikan kalimat yang mengandung kata perangkai "atau".
Membuktikan kalimat berbentuk $(P \vee R) \Longrightarrow Q$. Untuk ini digunakan tautologi $((P \Longrightarrow Q) \wedge (R \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow ((P \vee R) \Longrightarrow Q)$. Di sini diperlihatkan benarnya anteseden yaitu benarnya $P \Longrightarrow Q$ dan benarnya $R \Longrightarrow Q$, artinya R harus dapat diturunkan dari P maupun dari Q.

Contoh : Buktikan : $(a = 0 \vee b = 0) \Longrightarrow ab = 0$.

Bukti : Kasus (1) Buktikan $a = 0 \Longrightarrow ab = 0$. Andaikan $a = 0$ maka $a.b = 0.b = 0$.

Kasus (2) Buktikan $b = 0 \Longrightarrow ab = 0$. Andaikan $b = 0$ maka $a.b = a.0 = 0$

Dengan jalan yang sama dilakukan untuk membuktikan $(P_1 \vee P_2 \vee \ \ldots \vee P_n) \Longrightarrow Q$ yaitu membuktikan masing-masing

$P_1 \Longrightarrow Q$

$P_2 \Longrightarrow Q$

$P_3 \Longrightarrow Q$

.

.

$P_n \Longrightarrow Q$

Yustifikasi bukti ini adalah tautologi

$$((P_1 \Longrightarrow Q) \wedge (P_2 \Longrightarrow Q) \wedge \ldots \wedge P_n \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow ((P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \Longrightarrow Q)$$

Contoh : Jika x bilangan riel maka $|x| \geq 0$.

Bukti : Jika n bilangan riel maka berlakulah $x \geq 0$ atau $x < 0$ sehingga harus dibuktikan

$$(x \geq 0 \vee x < 0) \Longrightarrow |x| \geq 0.$$

Hal (1) $x \geq 0$. Jika $x \geq 0$ maka berdasarkan definisi $|x| = x$, jadi $|x| \geq 0$.

Hal (2) $x < 0$. Jika $x < 0$ maka berdasarkan definisi $|x| = -x$ jadi karena untuk $x < 0$ maka $-x > 0$ atau $|x| > 0$

Akibat (1) dan (2) maka $(x \geq 0 \vee x < 0) \Longrightarrow |x| \geq 0$.

6. BUKTI DENGAN INDUKSI MATEMATIKA

Andaikan akan dibuktikan kalimat dalam bentuk : Untuk setiap bilangan asli n, berlaku P(n) atau

An.P(n)

di mana kuantor menunjuk kepada semestanya yaitu

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Suatu cara untuk membuktikan kalimat dalam bentuk ini adalah dengan Induksi Matematika.

Prinsip Induksi Matematika. Andaikan P(n) adalah kalimat yang berlaku (jadi benar) untuk suatu $n \in N$, maka

$$(P(1) \wedge Ak.P(k) \Longrightarrow P(k + 1)) \Longrightarrow AnP(n)$$

Apabila dapat dibuktikan anteseden kalimat ini yaitu $P(1) \wedge Ak.(P(k) \Longrightarrow P(k + 1)$ maka dengan modus ponens dapat diturunkan AnP(n). Modus ponens yang dimaksud ialah :

$(P(1) \wedge Ak.\ P(k) \Longrightarrow P(k + 1)) \Longrightarrow AnP(n)$

$P(1) \wedge Ak.\ P(k) \Longrightarrow P(k + 1)$

AnP(n)

Untuk ini diperlukan dua langkah

(1) Langkah dasar : buktikan P(1)

(2) Langkah induksi : buktikan $Ak.\ P(k) \Longrightarrow P(k + 1)$

Ini berarti bahwa pertama dibuktikan dahulu P(1), kemudian membuktikan untuk setiap k, $P(k) \Longrightarrow P(k + 1)$. Di sini P(k) diambil sebagai aksioma sementara, jadi dianggap benar.

Kerangka pembuktian ini adalah sebagai berikut :

P(1)

$P(1) \Longrightarrow P(2)$

$P(2) \Longrightarrow P(3)$

.

. Ak. $P(k) \Longrightarrow P(k + 1)$

.

$P(n-1) \Longrightarrow P(n)$

.

.

.

Proses ini sama dengan kerangka berikut :

$$\frac{\begin{array}{l} P(1) \\ P(1) \Longrightarrow P(2) \end{array}}{\therefore \quad P(2)} \text{ kemudian } \frac{\begin{array}{l} P(2) \\ P(2) \Longrightarrow P(3) \end{array}}{\therefore \quad P(3)} \text{ kemudian } \frac{\begin{array}{l} P(3) \\ P(3) \Longrightarrow P(4) \end{array}}{\therefore \quad P(4)}$$

dan seterusnya, yang menghasilkan deretan tak berakhir
$P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots$
Ini berarti bahwa kita telah membuktikan $An P(n)$.

Perlu dicatat di sini bahwa bukti induksi matematika ini adalah <u>bukti deduktif</u>.

Contoh : Buktikan, $An.\ 2^n < 2^{n+1}$

Bukti :

(1) Langkah awal : Buktikan $P(1)$ yaitu $2^1 < 2^{1+1}$

$2^1 = 2,\ 2^{1+1} = 4$ jadi $2^1 < 2^{1+1}$

(2) Langkah induksi:

Buktikan $Ak.\ P(k) \Longrightarrow P(k+1)$

Andaikan $P(k) : 2^k < 2^{k+1}$ diturunkan $P(k+1)$ yaitu
$2^{k+1} < 2^{k+2}$

Prosedur :

$2^k < 2^{k+1}$ karena diandaikan

$2.2^k < 2.2^{k+1}$ (dikalikan dengan 2)

$2^{k+1} < 2^{k+2}$

Sehingga $P(k+1)$ dipenuhi.

Perlu diperhatikan bahwa membuktikan $P(1)$ adalah dengan substitusi, tetapi membuktikan $Ak.P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ memerlukan usaha lebih lanjut

Contoh : Buktikan untuk setiap bilangan alam n berlaku

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(1) Langkah dasar : Buktikan $P(1)$, $\sum_{j=1}^{1} j^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

Hal ini dipenuhi, dengan substitusi, $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

(2) Langkah induksi,

Andaikan $P(k)$, jadi $\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6}$

Akan diturunkan $P(k+1)$ yaitu

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \frac{(k+1).(k+2).(2(k+1)+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1).(k+2).(2k+3)}{6}$$

Selanjutnya

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \sum_{j=1}^{k} j^2 + (k+1)^2 \text{ berdasarkan definisi sigma}$$

$$= \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6} + (k+1)^2, \text{ dari } P(k)$$

$$= (k+1).\left(\frac{k.(2k+1)}{6} + (k+1)\right)$$

$$= (k+1).\left(\frac{k.(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)}{6}\right)$$

$$= (k+1).\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$$

$$= \frac{(k+1).(k+2).(2k+3)}{6}$$

Contoh berikut diambil dari Kalkulus. Telah diketahui definisi dari kalkulus :

Andaikan y adalah suatu fungsi riel. $D^n(y)$ menyatakan turunan ke-n dari y terhadap x dan didefinisikan sebagai berikut

1) $D^1(y) = D(y)$,

2) $D^{k+1}(y) = D(D^k(y))$, turunan ke-k+1 adalah turunan dari turunan ke-k.

Buktikanlah untuk setiap bilangan asli n, $D^n(xe^x) = (x+n)e^x$

Bukti. Akan dibuktikan $P(n) : D^n(xe^x) = (x+n)\ e^x$.

(1) Langkah dasar. Buktikan $P(1) : D(xe^x) = (x + 1)\, e^x$.
Dengan hukum perbanyakan untuk turunan diperoleh
$D(xe^x) = xe^x + e^x = (x + 1)e^x$, sehingga P(1) benar.

(2) Langkah induksi. Buktikan $\wedge$k. $P(k) \Longrightarrow P(k + 1)$
Andaikan P(k) yaitu $D^k(xe^x) = (x + k)\, e^x$
Cari D(k + 1) : $D^{k+1}(xe^x) = (x + (k + 1))\, e^x$.
Sekarang $D^{k+1}(xe^x) = D(D^k(xe^x))$

$= D((x + k)\, e^x)$, karena P(k)

$= (x + k)\, e^x + e^x$, dengan hukum perkalian untuk turunan.

$= (x + (k + 1))\, e^x$

Sehingga berlaku P(k + 1)

Ada kalanya semesta tidak mencakup seluruh bilangan alam akan tetapi dimulai dengan suatu bilangan alam tertentu.

Contoh : Buktikan, untuk bilangan alan $n \geqslant 2$ berlaku

$$\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n}$$

Bukti : Kalimat P(n) ialah $\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n}$, dengan semesta $\{2, 3, 4, \ldots\}$. Harus dibuktikan P(2) dan untuk setiap $k \geqslant 2$ berlaku $P(k) \Longrightarrow P(k + 1)$

(1) Langkah dasar. Buktikan P(2) : $\prod_{j=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{2}$. Ini dipenuhi karena $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(2) Langkah induksi.

Andaikan P(k) : $\prod_{j=2}^{k} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{k}$

Buktikan P(k + 1) : $\prod_{j=2}^{k+1} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{k+1}$

Selanjutnya $\prod_{j=2}^{k+1} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \prod_{j=2}^{k} \left(1 - \frac{1}{j}\right).\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \frac{1}{k}.\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$, karena P(k)

$= \frac{1}{k}.\left(\frac{k+1}{k+1} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \frac{1}{k+1}$

Jadi apabila P(k) maka P(k+1). Bukti selesai.

7. BUKTI DENGAN KONTRADIKSI ATAU KEMUSTAHILAN (REDUCTIO AD ABSURDUM)

Kontradiksi adalah suatu pernyataan yang selalu bernilai salah untuk setiap kemungkinan nilai unsur-unsur pokoknya. Sebagai contoh, kalimat R R adalah kontradiksi.

"Reductio ad absurdum" berarti " menurunkan suatu kemustahilan". Bukti tak langsung juga menunjuk kepada bukti dengan kemustahilan.

Kerangka umum dari reductio ad absurdum ini adalah : Dimulai dengan mengandaikan bahwa yang berlaku adalah ingkaran dari apa yang harus dibuktikan. Dari pengandaian ini diturunkan suatu kontradiksi (kemustahilan). Karena kontradiksi tak mungkin terjadisedangkan penalaran yang ditempuh adalah sahih maka munculnya kontradiksi ini hanya mungkin terjadi pada permulaan penalaran yaitu pada pengandaian. Sehingga yang benar adalah ingkaran dari pengandaian itu. Dengan menggunakan ingkaran rangkap maka tercapailah hal yang akan dibuktikan.

Pada pembicaraan tentang tautologi telah dikemukakan berapa bentuk bukti reductio ad absurdum beserta penggunaannya membuktikan teorema atau penyelesaian soal.

Pada bagian ini hanya diulangi secara garis besarnya, dan memberikan beberapa contoh lagi dalam penggunaannya.

7.1. Reductio ad absurdum bentuk pertama :

$$\overline{P} \Longrightarrow (Q \wedge \overline{Q})\ . \Longrightarrow .\ P$$

Bentuk ini menyatakan bahwa apabila dari kalimat $\overline{P}$ dapat diturunkan misalnya $Q \wedge \overline{Q}$, maka dapat disimpulkan benarnya P.

7.2. Reductio ad absurdum bentuk kedua :

$\overline{P} \Longrightarrow P \,.\Longrightarrow .\; P$

Untuk membuktikan P maka diandaikan $\overline{P}$. Apabila dari $\overline{P}$ ini dapat diturunkan P maka dalam sistemnya terdapat kontradiksi, yaitu $\overline{P}$ karena diandaikan dan sekali gus P karena diturunkan. Sehingga pengandaian harus diingkar dengan hasil $\overline{\overline{P}}$ yaitu P sendiri.

7.3. Reductio ad absurdum bentuk ketiga :

$(P \wedge \overline{Q}) \Longrightarrow Q \,.\Longrightarrow .\; P \Longrightarrow Q$

Yang harus dibuktikan adalah suatu implikasi $P \Longrightarrow Q$. Andaikan yang benar adalah ingkarannya yaitu $\overline{P \Longrightarrow Q}$ jadi $P \wedge \overline{Q}$. Dari ingkaran ini kita berusaha membuktikan Q. Apabila berhasil maka terdapat kontrdiksi dengan $\overline{Q}$, akibatnya pengandaian yaitu $P \wedge \overline{Q}$ harus diingkar yaitu $P \Longrightarrow Q$ terbukti.

7.4. Reductio ad absurdum bentuk keempat.:

$(P \wedge \overline{Q}) \Longrightarrow \overline{P} \,.\Longrightarrow .\; P \Longrightarrow Q$

Yang harus dibuktikan adalah suatu implikasi $P \Longrightarrow Q$. Ingkarannya adalah $P \wedge \overline{Q}$. Dari pengandaian ini, kita berusaha menurunkan $\overline{P}$ dan apabila berhasil maka terdapat kontradiksi yaitu P (diketahui) dan sekali gus $\overline{P}$ (diturunkan). Sehingga pengandaian $P \wedge \overline{Q}$ harus diingkar yaitu terbuktinya $P \Longrightarrow Q$.

Di bawah ini dikemukakan beberapa contoh lagi.

1). Buktikan : Untuk setiap x, $x \neq 0 \Longrightarrow x^{-1} \neq 0$.

Perhatikan ingkaran dari kalimat berkuantor.

Ingkaran dari kalimat di atas ialah

Ada suatu x sedemikian di mana $x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0$

Telah diketahui bahwa $x \,.\, x^{-1} = 1$.

Dari $x^{-1} = 0$ diperoleh $x \,.\, x^{-1} = x \,.\, 0 = 0$

Sehingga diperoleh 1 = 0. Kontradiksinya ialah $1 \neq 0 \wedge 1 = 0$, sehingga pengandaian harus diingkar. Jadi untuk setiap x berlaku $x \neq 0 \Longrightarrow x^{-1} \neq 0$.

2). Buktikan, untuk setiap x dan setiap y berlaku, jika x rasional dan y irrasional, maka x + y irrasional

Bukti : Kalimat di atas berbentuk

$$AxAy.\ (P \wedge Q) \Longrightarrow R$$

dimana P : x rasional
Q : y irrasional
R : x + y irrasional

Untuk membuktikannya dengan kontradiksi, andaikan $ExEy.\ \overline{(P \wedge Q) \Longrightarrow R}$ atau

$ExEy.\ (P \wedge Q) \wedge \overline{R}$

Ini berarti, andaikan ada suatu x dan y sedemikian sehingga

x rasional
y irrasional
x + y tidak irrasional (jadi rasional)

$x = \frac{a}{b}$, a dan b bilangan bulat, $b \neq 0$

$x + y = \frac{c}{d}$, c dan d bilangan bulat, $d \neq 0$

Sehingga

$$(x + y) - x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - da}{db}$$

cb - da dan db keduanya adalah bilangan bulat sehingga (x + y) - x adalah bilangan rasional. Tetapi (x + y) - x = y, jadi y rasional. Kontradiksi dengan ketentuan yaitu y irrasional Terbukti apa yang harus dibuktikan

3). f adalah suatu fungsi. Buktikan, jika untuk setiap $p > 0$ dan setiap x, $f(x + p) = f(x)$. maka f adalah konstan.(I)

Bukti.

a) Terjemahkan kalimat (I) ke dalam simbolisme logika yaitu

$(Ap > 0\ Ax\ .\ f(x + p) = f(x)) \Longrightarrow f$ adalah konstan.

b) Bentuk ingkaran dari kalimat (I) yaitu

$(Ap > 0\ Ax\ .\ f(x + p) = f(x)) \wedge f$ <u>tidak</u> konstan.

Kontradiksi yang akan muncul diperoleh dari ingkaran kalimat (I).

Sekarang, f tidak konstan <u>bhb</u> $ExEy\ .\ f(x) \neq f(y)$.

Jadi ada suatu x dan y sedemikian sehingga $f(x) \neq f(y)$.

Untuk setiap fungsi, $x = y \Longrightarrow f(x) = f(y)$, adalah kalimat yang benar, dan dengan kontra posisinya,

$$f(x) \neq f(y) \Longrightarrow x \neq y.$$

Sedangkan $x \neq y$ berarti $x < y$ atau $y < x$.

Kasus i) $x < y$. Ini berarti ada suatu $p' > 0$ sehingga $x + p' = y$, jadi $f(x + p') = f(y)$.

Tetapi jika $p' > 0$, dengan negasi dari (I), berlaku bahwa $f(x + p') = f(x)$.

Akibatnya $f(x) = f(y)$. Di sini terjadi kontradiksi yaitu

$$f(x) = f(y) \wedge f(x) \neq f(y)$$

Hal ini diturunkan dari negasi (I).

Kasus 2) y x. Sama seperti kasus i)

Dengan ditemuinya kontradiksi dalam kedua kasus ini maka telah terbuktilah kalimat (I), yaitu dengan mengingkar kalimat yang akan dibuktikan kebenarannya, diperoleh (diturunkan) kalimat yang mengandung kata gandeng "atau" dan dari padanya diturunkan kontradiksi.

8. MEMBUKTIKAN EKSISTENSI DAN KEUNIKAN (KETUNGGALAN)

Kalimat : Terdapat suatu x sedemikian hingga P(x), disimbolkan ExP(x).

Kalimat : Terdapat tepat satu x sedemikian hingga P(x), disimbolkan E!xP(x).

Kalimat lain yang sama artinya dengan kalimat terakhir ini ialah :

Ada dengan tunggal satu x sedemikian sehingga P(x)

Terdapat suatu x yang unik sedemikian sehingga P(x)

Terdapat paling sedikit satu x sehingga P(x), dan terdapat paling banyak satu x sehingga P(x).

Ada satu dan hanya satu x sedemikian sehingga P(x).

Membuktikan kalimat dalam bentuk E xP(x).

Ada dua bagian yang harus dibuktikan yaitu :

a) Bagian eksistensinya.

Membuktikan adanya x sehingga P(x) kalimat yang benar.

b) Bagian keunikannya.

Di sini kita membuktikan bahwa jika ada dua elemen x dan z sedemikian sehingga P(x) benar dan P(z) benar maka keduanya harus sama. Jadi harus dibuktikan,

$AxAz.(P(x) \wedge P(z)) \Longrightarrow x = z.$

Contoh. Buktikan : Terdapat dengan tunggal satu x sedemikian sehingga untuk setiap y berlaku $x + y = y + x = y$ dalam sistem bilangan riel.

Terjemahannya ke dalam simbolisme logika ialah membuktikan $E!xAy.x + y = y + x = y.$

Bukti.

a) Bagian eksistensi. Buktikan ExP(x) di mana P(x) adalah $Ay.x + y = y + x$. Dapat ditemukan x yang memenuhinya yaitu $x = 0$, di mana $Ay.\ 0 + y = y + 0 = y.$

b) Bagian ketunggalan (keunikan).

Buktikan $AxAz.(P(x) \wedge P(z)) \Longrightarrow x = z.$

Andaikan x dan z sembarang dan andaikan $P(x) \wedge P(z)$ benar.

Maka $Ay.x + y = y + x = y$ . . . . (1)

dan $Ay.z + y = y + z = y$ . . . . (2)

Dari (1) dapat disubstitusi z untuk y dan diperoleh

$x + z = z + x = z$ . . . . (3)

Demikian juga dari (2) dapat disubstitusi x untuk y dan diperoleh

$z + x = x + z = x \ldots\ldots (4)$

Dari (3) dan (4) diperoleh $x = z$.

Dengan menggunakan kontradiksi, keunikan ini.
Dari bagian eksistensi telah didapatkan bahwa 0 suatu bilangan yang memenuhi. Sekarang andaikan ada bilangan k lainnya sehingga untuk setiap x, $x + k = k + x = x$ dengan $k \neq 0$. Karena berlaku untuk setiap x, maka berlaku pula untuk 0, karena itu

$$0 + k = k + 0 = 0$$

Tetapi diketahui pula bahwa $k + 0 = k$
Sehingga $k = 0$, suatu kontradiksi dengan pengandaian $k \neq 0$.

Di atas telah dikemukakan beberapa metode pembuktian beserta contoh-contoh pemakaiannya. Maksudnya menunjukkan alat yand dapat digunakan untuk membuktikan teoreme-teorema atau penyelaesaian masalah matematika. Hal yang sama seperti kuas dan cat menjadi bagian dari alat-alat seorang pelukis. Namun biarpun pelukis memiliki alat-alat lukis tersebut bukanlah jaminan untuk terciptanya suatu lukisan yang indah. Demikian juga halnya, memahami dan mengetahui berbagai metoda sebagai alat pembuktian, bukanlah suatu jaminan bahwa kita dengan sendirinya dapat melakukan pembuktian dengan benar. Tidak ada cara tertentu untuk memilih metode mana yang akan digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah. Pengalaman dalam latihan adalah kunci pokok dalam hal ini.

LATIHAN

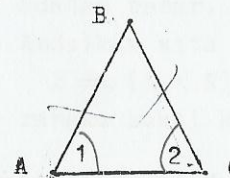
Untuk soal 1 - 11 gunakan bukti langsung dengan konisional untuk menyelesaikannya.

1. Jika a genap dan b genap maka a + b genap.
2. Jika a genap dan b genap maka ab genap.
3. Jika a genap dan b gabjil maka a + b ganjil.
4. Jika a genap dan b ganjil maka ab genap.
5. Jika a ganjil dan b ganjil maka a + b genap.
6. Jika a ganjil dan b ganjil maka ab ganjil.
7. Jika a ganjil maka a^2 ganjil.
8. Buktikan : Setiap kalimat dalam bentuk

   $$\exists y \forall x.P(x,y) \Longrightarrow \forall x \exists y.P(x,y)$$

   bernilai benar.
9. Berikan bukti dengan kontra posisi untuk soal 7 dan 8.
10. Jika a^2 ganjil, maka a ganjil.
11. Pembagi sejati suatu bilangan adalah pembagi yang kurang dari pada bilangan itu. Bilangan sempurna adalah bilangan yang sama dengan jumlah pembagi-pembagi sejatinya.
    Buktikan : Jika n (bilangan alam) adalah sempurna. maka n tidak prim.

Untuk soal 12 - 19 buktikan timbal balik.

12. a bilangan bulat ganjil $\Longleftrightarrow$ a^2 bilangan bulat ganjil.
13. Perhatikan gambar.

Buktikan : $AB = BC \Longleftrightarrow \angle 1 = \angle 2$

14. $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c$.
15. x bilangan bulat genap jika dan hanya jika x + 2 bilangan bulat genap.
16. x bilangan bulat ganjil jika dan hanya jika x + 1 bilangan bulat genap.

17. Setiap kalimat dalam bentuk $ExEy.P(x,y) \Longleftrightarrow EyEx.P(x,y)$, adalah benar.
18. Setiap kalimat dalam bentuk $Ax(P(x) \wedge Q(x)) \Longleftrightarrow (AxP(x) \wedge A(x)Q(x))$ adalah benar.
19. Para matematisi biasa membuktikan kalimat dalam bentuk $P \Rightarrow (Q \vee R)$ dengan membuktikan $(P \wedge \sim Q) \Rightarrow R$ dan $(P \wedge \sim R) \Rightarrow Q$. Tunjukkanlah tautologi yang membenarkan hal ini.

Untuk soal 20 - 28 buatlah model pembuktiannya, selanjutnya buktikanlah.

20. $Ax(x^2$ genap bhb x genap).
21. $AaAb(a < b$ bhb $a + 8 < b + 8)$
22. Untuk dua himpunan A dan B, $x \in A \cup B$ bhb $x \in B \cup A$.
23. Untuk himpunan A, $A \subset A$.
24. $Ex.x^2 = x$.
25. $E(u_n). (\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergen $\wedge \lim_{n \to \infty} u_n = 0)$
26. $EyAx.x + y = x$.
27. Untuk himpunan A, $\emptyset \subset A$.
28. $EyAx.\ xy = x$.

Untuk soal 29 - 48 gunakanlah metode pembuktian kasus untuk menyelesaikannya.

29. Jika A sebuah sudut, maka A lancip v ______ v ______.
30. Jika f suatu fungsi maka kasus yang dapat diturunkan ialah
    a) f dapat didifferensialkan v ______
    b) f fungsi genap v ______ v f tidak genap dan tidak ganjil.
    c) f konstan v ______
31. Apabila x bilangan bulat maka
    a) x genap v ______
    b) $x > 9$ v ______ v $x < 9$.
32. Bila x bilangan riel maka $|-x| = |x|$.
33. Jika x bilangan riel maka $|x^2| = |x|^2$.
34. Untuk setiap bilangan riel x, $x \leq |x|$.

35. Jika x dan y bilangan-bilangan riel maka $|xy| = |x| \cdot |y|$
36. Jika $a > 0$, maka $|x| < a$ bhb $-a < x < a$.
37. Jika $a > 0$, maka $|x| > a$ bhb $x > a \vee x < -a$.
38. Jika x dan y bilangan-bilangan riel, maka $|x + y| \leq |x| + |y|$.
39. Jika x dan y bilangan-bilangan riel, maka $|x| - |y| \leq |x - y|$.
40. Jika f fungsi monoton tajam maka f adalah fungsi satu-satu.
41. Jika x bilangan bulat, maka $x^2 - x$ bilangan genap.
42. Jika x bilangan bulat, maka $x^2 + x + 1$ bilangan ganjil
43. Carilah suatu bukti kasus untuk teorema kosinus dalam trigonometri.
44. Carilah bukti dengan kasus untuk formula $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
45. Carilah bukti dengan kasus untuk teorema Rolle dalam kalkulus.
46. Fungsi g yang dinyatakan oleh $g(x) = |x|$, $x \neq 0$ adalah differensiabel, sementara fungsi f yang dinyatakan oleh $f(x) = |x|$, tidak dapat didifferensiasi. Tentukanlah formula untuk g' dengan menggunakan bukti kasus.
47. Buktikan : Setiap kalimat dalam bentuk $(AxP(x) \vee AxQ(x)) \Longrightarrow (AxP(x) \vee Q(x))$ adalah benar.
48. Andaikan kita mau membuktikan kalimat dalam bentuk $P \Longrightarrow (Q \wedge R)$ dengan kontraposisi. Tunjukkanlah kerangka bukti kasus yang akan digunakan.

Gunakan Induksi Matematika untuk soal-soal berikut.

49. $An\ N,\ 2^n > n$.
50. $An\ N,\ 3^n > n$.
51. $An\ N,\ 2 \leq 2^n$.
52. $An\ N,\ 2n \leq 2^n$.
53. $An\ N.\ n < n + 1$.
54. $An\ N.\ 2^{n-1} \leq n!$.

55. An $\geqslant 4.\ 2^n < n!$.
56. Andaikan a dan b bilangan riel positif.

    Buktikan An $\in N\ (a < b \Rightarrow a^n < b^n)$.
57. An$\in N.\ (2n)! < 2^{2n}(n!\ )^2$.
58. An$\in N.\ |\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin x|$.
59. Buktikan Teorema De Moivre : An$\in N$, Au$\in R$,

    $(\cos u + i \sin u)^n = \cos(nu) + i \sin(nu),\ i^2 = -1.$
60. An$\in N.\ \prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n + 1}{2n}$.
61. An$\in N,\ \prod_{j=2}^{n} \cos 2^{j-1}u = \frac{\sin 2^n u}{2^n \sin u},\ \sin u \neq 0$.
62. Buktikan ketaksamaan Bernoulli :

    $a > -1 \Rightarrow$ An $\in N.\ (1 + a)^n \geqslant 1 + na$.
63. An $\in N.\ \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n^2 + n}{2}$.
64. An N. $\sum_{j=1}^{n} 2^j = 2^{n+1} - 2$.
65. Diketahui himpunan n titik pada bidang, $n \geqslant 2$, tidak ada tiga titik yang kolinier. Buktikan bahwa banyaknya garis penghubung setiap dua titik adalah

    $\frac{n(n - 1)}{2}$.

Buktikanlah yang berikut ini dengan kontradiksi (reductio ad absurdum). Terjemahkanlah lebih dahulu kalimatnya kemudian ingkari. Tentukan jenis kontradiksi yang digunakan.

Untuk soal 66 - 74 berhubungan dengan sistem bilangan riel

66. Untuk setiap non-negatif x dan setiap y, jika x rasional dan y irrasional, maka x . y irrasional.
67. Untuk setiap x dan setiap y , $(x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Rightarrow xy \neq 0$
68. Untuk setiap x dan setiap y , $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$.
69. Untuk setiap x dan setiap y , $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$.

70. Untuk setiap $x > 0$, $\sqrt{x} < \sqrt{x + 1}$.
71. Untuk setiap $x > 0$, $x + x^{-1} \geqslant 2$.
72. a) Terdapat suatu bilangan irrasional a dan suatu bilangan irrasional b sedemikian hingga a^b rasional.

    b) Apakah bukti kontradiksi ini benar-benar dapat menunjukkan suatu a dan b sedemikian sehingga a^b rasional ?
73. Dalam sistem bilangan riel, kalimat

    Ax. $x + 0 = 0 + x = x$, adalah benar.

    Andaikan ada suatu bilangan riel k lainnya sehingga berlaku $k \neq 0$ dan Ax. $x + k = k + x = x$.

    Turunkanlah suatu kontradiksi dari pernyataan ini.
74. Dalam sistem bilangan riel, kalimat

    Ax. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, adalah benar.

    Andaikan ada suatu bilangan riel k lainnya sehingga

    Ax. $x \cdot k = k \cdot x = x$.

    Turunkanlah suatu kontradiksi dari pernyataan ini.

Untuk soal-soal 75 - 80 berhubungan dengan sistem bilangan bulat. Buktikanlah dengan kontradiksi.

75. Untuk setiap x, jika x^2 genap maka x genap.
76. Untuk setiap x, jika x^2 ganjil maka x ganjil.
77. Untuk setiap x, jika x genap maka x + 1 ganjil.
78. Untuk setiap x, jika x ganjil maka x + 1 genap.
79. Untuk setiap $x > 0$ terdapat suatu bilangan genap m sehingga $m > x$.
80. Untuk setiap $x > 0$ terdapat suatu bilangan ganjil m sehingga $m > x$.
81. Untuk setiap bilangan riel positip a dan setiap bilangan riel positip b berlakulah

    $\sqrt{a + b} \lneqq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Gunakan bukti eksistensi untuk soal-soal 82 - 84.

82. Terdapat tepat satu x sehingga untuk setiap y berlaku $x \cdot y = y \cdot x = y$.
83. Untuk setiap x ada y yang unik sehingga $x + y = y + x = 0$
84. Untuk setiap x terdapat dengan tunggal satu y sehingga jika $x \neq 0$ maka $x \cdot y = y \cdot x = 1$.

V. TEORI HIMPUNAN

1. PENGERTIAN

Konsep Himpunan yang berasal dari G.Cantor (1845 - 1918) ini merupakan suatu konsep yang sangat penting dan sangat mendasar bagi seluruh matematika. Teori himpunan telah dikembangkan oleh Cantor menjadi suatu disiplin yang sangat mengagumkan. Teori ini merupakan suatu kreasi terbesar dari intelek manusia. Ia, bersama-sama dengan Logika menjadi landasan bagi seluruh matematika dan memperkaya hampir setiap cabang dari matematika. Boleh dikatakan bahwa tanpa teori himpunan matematika tidak akan berkembang sepesat sebagaimana kita lihat sekarang. Akhirnya teori himpunan mempunyai pengaruh khusus bagi penyelidikan dasar-dasar matematika, yang dalam hal ini, dikarenakan keumuman konsep-konsepnya, berperan sebagai suatu mata rantai penghubung antara matematika dan filsafat.

Pengertian himpunan dan menjadi anggota himpunan menjadi dasar setiap pembicaraan dalam matematika. Di sini, kedua pengertian itu dianggap secara intuitif dapat ditangkap, artinya, secara spontan dapat dimengerti. Mendefinisikan himpunan dan menjadi anggota himpunan secara eksplisit akan membawa kita kepada kontradiksi, suatu hal yang tak boleh dijumpai dalam matematika. Oleh karena itu himpunan dan menjadi anggota himpunan harus diperkenalkan secara implisit, yaitu melui aksioma-aksioma.

Demikianlah secara intuitif kita mengerti apa yang dimaksud dengan himpunan pemain bola, himpunan semua bilangan asli, dan sebagainya. Oleh karena itu, himpunan dan menjadi anggota himpunan menjadi pengertian pangkal (pengertian prinitif, undefined terms) pada teori himpunan.

Apabila elemen (unsur) a menjadi anggota dari himpunan H maka hal ini disajikan dengan $a \in H$. Sedangkan ingkarannya, yaitu a bukan anggota H, disajikan dengan $a \notin H$, atau $\overline{a \in H}$.

Apabila H suatu himpunan berhingga, yaitu banyaknya anggota H adalah berhingga, maka himpunan itu dapat dinyatakan dengan membu-

at daftar dari nama-nama anggota-anggotanya. Demikianlah misalnya $H = \{1, 2, 3\}$ adalah himpunan 1, 2, dan 3. Apabila H tak berhingga, cara demikian tak mungkin dikerjakan. Maka H disajikan menggunakan syarat keanggotaannya. Misalnya semesta pembicaraannya adalah S, sedangkan variabel, yaitu tanda untuk menunjuk anggota sembarang dari S, disajikan dengan menggunakan huruf x. Maka notasi:

$$x \mid P(x)$$

dibaca "himpunan semua x, sedemikian hingga x mempunyai sifat P". Rumus di atas menyajikan himpunan semua anggota dari semestanya yang mempunyai sifat P. Misalnya $\{x \mid 0 < x < 1\}$ menyajikan himpunan bilangan riel yang terletak antara 0 dan 1, (semesta pembicaraan bilangan-bilangan riel).

2. KESAMAAN DUA HIMPUNAN DAN RELASI INKLUSI

Kesamaan dua himpunan didefinisikan ekstensional, yaitu ditinjau dari anggota-anggotanya saja.

DEFINISI : Dua himpunan H dan K disebut sama bhb setiap anggota H adalah anggota K dan sebaliknya.

$$H = K \text{ bhb } (Ax).\ x \in H \Longleftrightarrow x \in K$$

Dengan demikian $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 3, 1\}$ dan seterusnya, jadi urutan tidak diperhatikan.

DEFINISI : Himpunan H dikatakan menjadi himpunan bagian (subset) dari himpunan K, dengan notasi $H \subseteq K$, bhb setiap anggota dari H menjadi anggota dari K.

$$H \subseteq K \text{ bhb } (Ax).\ x \in H \Longrightarrow x \in K$$

Perhatikanlah bahwa menurut definisi ini setiap himpunan menjadi himpunan bagian dari dirinya sendiri.

Sedangkan kesamaan dua himpunan dua himpunan sekarang dapat dinyatakan sebagai :

$$H = K \text{ bhb } H \subseteq K \;\&\; K \subseteq H$$

yaitu H termuat dalam K dan K termuat dalam H. Perlu juga ditegaskan perbedaan antara <u>relasi</u> <u>menjadi anggota</u> dan <u>relasi inklusif</u>. Umpamanya, $a \in H$ sedangkan $\{a\} \subseteq H$. Relasi $\in$ adalah relasi antara anggota dengan himpunan, sedangkan $\subseteq$ adalah relasi antara himpunan dengan himpunan.

3. HIMPUNAN KOSONG

Kita telah menentukan himpunan dengan menggunakan syarat keanggotaan. Suatu syarat keanggotaan dapat menentukan himpunan yang tidak mempunyai anggota, yaitu himpunan kosong dengan notasi $\emptyset$. Misalnya himpunan orang-orang yang berkepala tiga. Dua himpunan kosong $\emptyset_1$ dan $\emptyset_2$ adalah sama, sebab kalimat $x \in \emptyset_1 \implies x \in \emptyset_2$ bernilai benar, karena antesedennya salah. Demikian juga kalimat $x \in \emptyset_2 \implies x \in \emptyset_1$ bernilai benar. Sehingga menurut definisi kesamaan dua himpunan maka $\emptyset_1 = \emptyset_2$. Maka sekarang kita dapat mendefinisikan himpunan kosong $\emptyset$ sebagai :

DEFINISI : Himpunan $\{x \mid x \neq x\}$ disebut himpunan kosong, dengan notasi $\emptyset$.

TEOREMA : Himpunan kosong adalah himpunan bagian dari setiap himpunan.

Bukti 1 : Ambil himpunan sembarang H. <u>Andaikan</u> $\emptyset$ bukan himpunan bagian dari H, yaitu $\emptyset \not\subseteq H$. Maka ada $x \in \emptyset$ dan $x \notin H$. Kalimat terakhir ini pasti salah karena $\emptyset$ tidak mempunyai anggota. Sehingga pengandaian harus diingkar dan terbukti $\emptyset \subseteq H$. Karena H sembarang maka $\emptyset$ menjadi himpunan bagian dari setiap himpunan.

Bukti 2 : Dengan menggunakan definisi tentang implikasi material, maka bukti berjalan demikian. Untuk menyimpulkan $\emptyset \subseteq H$ harus dibuktikan benarnya kalimat "$x \in \emptyset \implies x \in H$". Tetapi hal ini memang demikian karena $x \in H$ bernilai salah, dan implikasi dengan anteseden

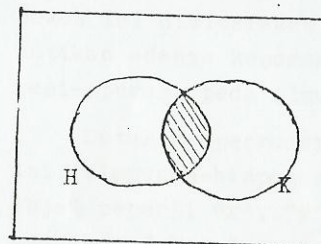
salah pasti bernilai benar.

Sekarang akan didefinisikan beberapa operasi pada himpunan.

4. INTERSEKSI ATAU IRISAN

DEFINISI : Interseksi dari dua himpunan H dan K, dengan notasi $H \cap K$, didefinisikan sebagai himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas semua elemen yang sekaligus berada dalam H maupun dalam K.

$$H \cap K \;.=\text{df}.\; \{x \mid x \in H \;\&\; x \in K\}$$

Tanda " = df " dibaca "didefinisikan sebagai".

Dalam diagram VENN di samping ini, bagian yang diarsir adalah $H \cap K$. Apabila $H = \{2, 3, 5\}$ sedangkan $K = \{3, 7\}$ maka $H \cap K = \{3\}$. Apabila $H = \{x \mid 0 < x < 3\}$ dan $K = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$ maka $H \cap K = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$. Apabila $H \cap K = \emptyset$ maka H dan K disebut saling asing (lepas).

Perhatikan bahwa $H \cap K = K \cap H$. Karena untuk setiap H berlaku $\emptyset \cap H = H \cap \emptyset$ maka menurut definisi di atas $\emptyset$ saling asing dengan setiap himpunan. Karena juga $\emptyset \subseteq H$ untuk setiap H maka didapat :

Himpunan kosong $\emptyset$ merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan dan sekaligus saling asing dengan setiap himpunan.

5. UNION ATAU GABUNGAN, SELISIH DAN KOMPLEMEN

DEFINISI : Union dari himpunan H dan K, dengan notasi $H \cup K$, didefinisikan himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas semua elemen yang sekurang-kurangnya menjadi anggota dari salah satu himpunan H atau K.

$$H \cup K \;.=\text{df}.\; \{x \mid x \in H \;\vee\; x \in K\}$$

Umpamanya $H = \{1, 4, 7\}$ dan $K = \{1, 4, 8\}$ maka $H \cup K = \{1, 4, 7, 8\}$

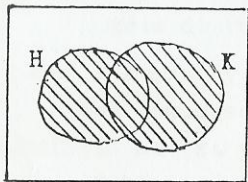
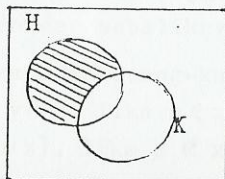
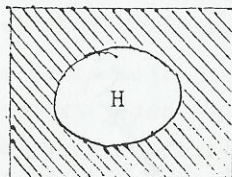
DEFINISI : Selisih dari dua himpunan H dan K, dengan notasi H − K didefinisikan sebagai himpunan yang anggota-anggotanya terdiri atas semua elemen H yang tidak berada dalam K.

$$H - K \; . = df \; . \; \{ x \mid x \in H \;\&\; x \notin K \}$$

Misalnya $H = \{1, 4, 7\}$ dan $K = \{1, 4, 8\}$ maka $H - K = \{7\}$ dan $K - H = \{8\}$.

DEFINISI : Selisih dari semesta S dengan H, yaitu S − H disebut komplemen dari H, dengan notasi H^c. Jadi H^c terdiri atas semua elemen semesta S yang tidak berada dalam H.

$$H^c = \{ x \mid x \notin H \}$$

Diagram-diagram di bawah ini mengillustrasikan definisi-definisi di atas.

$H \cup K$

H − K

H^c

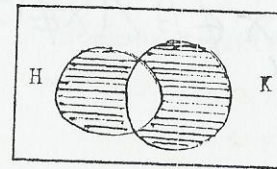
Contoh : Apabila semesta $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sedangkan $H = \{2, 4\}$ dan $K = \{2, 3, 5\}$ maka $H \cap K = \{2\}$, $H \cup K = \{2, 3, 4, 5\}$, $H - K = \{4\}$, $K - H = \{3, 5\}$, $K^c = \{1, 4\}$.

5a. SELISIH SIMETRIS

DEFINISI : Selisih simetris dari H dan K, didefinisikan $H \triangle K$, didefinisikan sebagai himpunan yang terdiri dari semua anggota H yang tidak dalam K, beserta semua anggota K yang tidak berada dalam H. Atau semua anggota $H \cup K$ yang tidak dalam $H \cap K$.

$$H \triangle K \; . = df \; . \; (H \cup K) - (H \cap K)$$

$H \triangle K$

Contoh : $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $K = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ maka $H \triangle K = \{2, 4, 7, 9\}$

6. ALJABAR HIMPUNAN

6.1. SIFAT-SIFAT DAN RUMUS-RUMUS

Pembicaraan di atas memperlihatkan bahwa himpunan-himpunan dapat dikomposisikan satu dengan yang lain. Selain komposisi-komposisi yang menyangkut dua himpunan seperti union, interseksi, selisih dan selisih simetris (yang disebut operasi biner), ada juga operasi yang hanya menyangkut satu himpunan saja., yaitu komplementasi. Di bawah ini dibicarakan rumus-rumus pokok dari aljabar himpunan. Perhatikan adanya kesamaan tetapi juga adanya perbedaannya dengan operasi-operasi pada ilmu hitung.

Untuk mempermudah penulisan maka dalam uraian-uraian di bawah ini, himpunan-himpunan disajikan dengan huruf-huruf terakhir dari abjad seperti "x", "y", "z" dst, sedangkan anggota-anggotanya dengan huruf-huruf permulaan dari abjad seperti "a", "b", "c", dst.

Rumus-rumus di bawah ini berlaku untuk setiap himpunan x, y, z.

RUMUS 1. $x \subseteq x$ — sifat refleksif

$x \subseteq y \;\&\; y \subseteq x$ bhb $x = y$ — sifat anti-simetris

$x \subseteq y \;\&\; y \subseteq z \Longrightarrow x \subseteq z$ — sifat transitif

Bukti : Langsung diturunkan dari definisi relasi inklusi $\subseteq$. Misalnya yang ketiga dibuktikan demikian. Ambil $a \in x$. Karena $x \subseteq y$ maka $a \in y$. Oleh sebab $y \subseteq z$ dan $a \in y$ maka $a \in z$. Terbukti bahwa $a \in x \Longrightarrow a \in z$, yaitu $x \subseteq z$.

RUMUS 2. $x \cap x = x$ dan $x \cup x = x$ Sifat idempoten

$x \cap y = y \cap x$ dan $x \cup y = y \cup x$ Sifat komutatif

$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$ dan $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ Sifat assosiatif

$x \cap (y \cup z) = x \cap y . \cup . x \cap z$ dan $x \cup (y \cap z) = x \cup y . \cap . x \cup z$ sifat distributif

Semua rumus di atas dapat dibuktikan langsung dari definisi-definisi dengan menggunakan arti dari kata-kata "dan", "atau" seperti tertuang dalam tabel-tabel nilai. Perhatikan bahwa ada dua hukum distributif, yaitu hukum distributif interseksi terhadap union dan hukum distributif union terhadap interseksi.

Sebagai contoh akan dibuktikan hukum distributif union terhadap interseksi.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ maka akan diperlihatkan bahwa setiap anggota di ruas kiri menjadi anggota di ruas kanan dan sebaliknya. Dibuktikan demikian :

Apabila $a \in x \cup (y \cap z)$ maka a sekurang-kurangnya dalam salah satu dari kedua himpunan x dan $y \cap z$. Jika $a \in x$ maka $a \in x \cup y$ dan $a \in x \cup z$. Sehingga $a \in (x \cup y) \cap (x \cup z)$. Jika $a \notin x$ maka $a \in y \cap z$, jadi $a \in y$ dan $a \in z$. Sehingga $a \in x \cup y$ dan $a \in x \cup z$. Maka $a \in (x \cup y) \cap (x \cup z)$. Terbukti bahwa $a \in x \cup (y \cap z) \Longrightarrow a \in (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

Sebaliknya, misalkan $a \in (x \cup y) \cap (x \cup z)$. Jika $a \in x$ maka $a \in x \cup (y \cap z)$. Jika $a \notin x$ maka pastilah $a \in y$ dan $a \in z$, Jadi $a \in y \cap z$. Sehingga juga $a \in x \cup (y \cap z)$. Terbukti bahwa $a \in (x \cup y) \cap (x \cup z) \Longrightarrow a \in x \cup (y \cap z)$

RUMUS 3. $x \subseteq x \cup y$ dan $y \subseteq x \cup y$

$x \cap y \subseteq x$ dan $x \cap y \subseteq y$

$x \subseteq z$ & $y \subseteq z$ bhb $x \cup y \subseteq z$

$z \subseteq x$ & $z \subseteq y$ bhb $z \subseteq x \cap y$

Buktikanlah rumus-rumus di atas langsung dengan menggunakan definisi-definisi. Gunakan diagram Venn untuk mengingat-ingat rumus-rumus di atas.

RUMUS 4. $x \subseteq y$ bhb $x \cup y = y$ bhb $x \cap y = x$

Langsung dibuktikan dari definisi.

RUMUS 5. $(x \cap y)^c = x^c \cup y^c$

$(x \cup y)^c = x^c \cap y^c$ Hukum de Morgan

Perhatikan konstruksi rumus-rumus di atas, yaitu tanda komplementasi masuk, sedangkan tanda interseksi berubah menjadi tanda union dan sebaliknya.

Bukti. Apabila $a \in (x \cap y)^c$ maka tidak benarlah a sekaligus dalam x dan dalam y. Jadi pasti tidak dalam x atau tidak dalam y atau tidak dalam kedua-duanya. Yaitu $a \notin x$ atau $a \notin y$. Dengan kata lain $a \in x^c$ atau $a \in y^c$. Sehingga $a \in x^c \cup y^c$. Maka terbukti $a \in (x \cap y)^c \Longrightarrow a \in x^c \cup y^c$. Pemikiran di atas dapat dibalik, sehingga juga $a \in x^c \cup y^c \Longrightarrow a \in (x \cap y)^c$. Maka terbuktilah rumusnya.

Rumus kedua dibuktikan dengan jalan yang sama.

RUMUS 6. $(x^c)^c = x$

$\emptyset^c = S$

$S^c = \emptyset$

Bukti. Apabila $a \in (x^c)^c$ maka $a \notin x^c$, yaitu tidak benar bahwa a tidak dalam x. Jadi $a \in x$. Sebaliknya apabila $a \in x$ maka $a \notin x^c$. Sehingga $a \in (x^c)^c$.

Himpunan $\emptyset^c$ terdiri atas semua elemen yang tidak berada dalam $\emptyset$. Sehingga syarat keanggotaannya $\emptyset^c$ dipenuhi oleh semua elemen dari semestanya. Jadi $\emptyset^c = S$.

Karena S ialah himpunan semua elemen yang dibicarakan sedangkan hanya elemen-elemen dalam semesta S-lah yang dibicarakan, maka dalam pembicaraan ini $S^c = \emptyset$.

RUMUS 7. $\emptyset \subseteq x \subseteq S$

$\emptyset \cap x = \emptyset$ dan $S \cap x = x$

$\emptyset \cup x = x$ dan $S \cup x = S$

$x \cap x^c = \emptyset$ dan $x \cup x^c = S$

Bukti. Langsung dari definisi diturunkan. Kita buktikan misalnya bahwa $x \cap x^c = \emptyset$. Oleh karena $\{a \mid a \in x \cap x^c\}$ berarti a sekaligus berada dalam x dan tidak dalam x maka hal ini tidak dapat dipenuhi oleh anggota manapun dari semestanya. Sehingga $x \cap x^c = \emptyset$. Perhatikan bahwa disini a berperan sebagai variabel yang menunjuk anggota sembarang dari semestanya.

RUMUS 8. $x \cap (x \cup y) = x \cup (x \cap y) = x$ Hk. Absorpsi

Bukti. Karena $x \subseteq x \cup y$ maka $x \cap (x \cup y) = x$. Demikian juga karena $x \cap y \subseteq x$ maka $x \cup (x \cap y) = x$.

RUMUS 9. $x - y = x \cap y^c$

Bukti. $x - y = \{a \mid a \in x \ \& \ a \notin y\} = \{a \mid a \in x \ \& \ a \in y^c\} = x \cap y^c$

RUMUS 10. $x \triangle y = (x \cap y^c) \cup (y \cap x^c)$

$x \triangle y = y \triangle x$

$(x \triangle y) \triangle z = x \triangle (y \triangle z)$

$x \cap (y \triangle z) = (x \cap y) \triangle (x \cap z)$

Bukti. $x \triangle y = (x \cup y) - (x \cap y) = (x \cup y) \cap (x \cap y)^c$

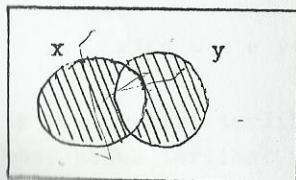
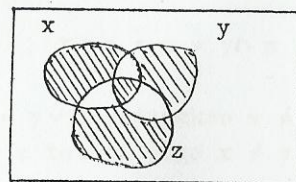
$= (x \cup y) \cap (x^c \cup y^c)$

$= x \cap (x^c \cup y^c) . \cup . y \cap (x^c \cup y^c)$

$= x \cap x^c . \cup . x \cap y^c . \cup . y \cap x^c . \cup . y \cap y^c$

$= \emptyset . \cup . x \cap y^c . \cup . y \cap x^c . \cup . \emptyset$

$= (x \cap y^c) \cup (y \cap x^c)$

Sifat assosiativitas dibuktikan demikian.

α diarsir

$\alpha \triangle z$ diarsir

$x \triangle y$ disebut α dan $y \triangle z$ disebut β. Maka harus dibuktikan bahwa $\alpha \triangle z = x \triangle \beta$. Perhatikan bahwa $\alpha \triangle z$ itu terdiri atas anggota-anggota α yang tidak dalam z beserta anggota-anggota z yang tidak dalam α. Tetapi anggota-anggota dari $x \cap y$ justru tidak dalam α. Sehingga $\alpha \triangle z = (x \triangle y) \triangle z$ terdiri atas (1) elemen-elemen yang tepat berada dalam salah satu x, y, atau z. (2) elemen-elemen yang sekaligus berada dalam x, y dan z. Demikian pula $x \triangle (y \triangle z)$ terdiri atas elemen-elemen dalam (1) dan (2) di atas.

Sekarang bukti dari distributivitas $x \cap (y \triangle z) = (x \cap y) \triangle (x \cap z)$ demikian : Dari pihak kiri :

$x \cap (y \triangle z) = x \cap (y \cap z^c . \cup . z \cap y^c) = (x \cap y \cap z^c) . \cup . (x \cap z \cap y^c) \ldots I$

Dari pihak kanan :

$(x \cap y) \triangle (x \cap z) = (x \cap y) \cap (x \cap z)^c . \cup . (x \cap z) \cap (x \cap y)^c$

$= (x \cap y) \cap (x^c \cup z^c) . \cup . (x \cap z) \cap (x^c \cup y^c)$

$= (x \cap y \cap x^c) . \cup . (x \cap y \cap z^c) . \cup . (x \cap z \cap x^c) . \cup . (x \cap y \cap z^c)$

$= \emptyset . \cup . (x \cap y \cap z^c) . \cup . \emptyset . \cup . (x \cap z \cap y^c)$

$= (x \cap y \cap z^c) . \cup . (x \cap z \cap y^c) \ldots\ldots\ldots\ldots \ II$

Karena I = II maka terbukti distributivitas di atas

6.2. CONTOH-CONTOH SOAL

1. Buktikan bahwa $x \subseteq y$ bhb $y^c \subseteq x^c$

   Bukti. Ketentuan $x \subseteq y$ berarti untuk setiap a berlakulah, $a \in x \implies a \in y$. Dengan kontraposisi $a \notin y \implies a \notin x$. Ambil sekarang $a \in y^c$, maka $a \notin y$, sehingga $a \notin x$, yaitu $a \in x^c$. Terbukti $a \in y^c \implies a \in x^c$. Jadi $y^c \subseteq x^c$.

   Sebaliknya jika $y^c \subseteq x^c$ maka untuk setiap a berlaku $a \in y^c \implies a \in x^c$. Dengan kontraposisi $a \notin x^c \implies a \notin y^c$, yaitu $a \in x \implies a \in y$ sehingga $x \subseteq y$.

Bukti yang lain. Karena $x \subseteq y$ maka $x \cup y = y$, sehingga $(x \cup y)^c = y^c$. Selanjutnya dengan hukum de Morgen didapat $x^c \cap y^c = y^c$. Dan sekali lagi dengan rumus 4 diturunkan $y^c \subseteq x^c$. Dengan jalan yang sama dibuktikan $y^c \subseteq x^c \implies x \subseteq y$.

2. Buktikan $x \subseteq y^c$ bhb $x \cap y = \emptyset$.

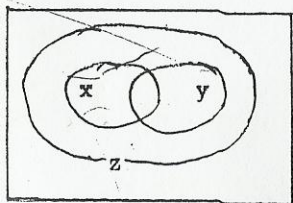
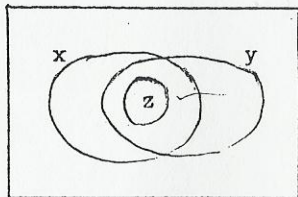
Bukti. Dengan reductio ad absurdum. Dibuktikan dahulu bahwa $x \subseteq y^c \Longrightarrow x \cap y = \emptyset$. Karena $x \subseteq y^c$ maka setiap anggota x menjadi anggota y^c. Andaikan $x \cap y \neq \emptyset$. Maka ada a dengan $a \in x$ dan $a \in y$. Karena setiap anggota x adalah anggota y^c maka $a \in y^c$. Kontradiksi, sebab $y \cap y^c = \emptyset$. Pengandaian harus diingkar dan terbukti $x \cap y = \emptyset$

Sebaliknya dari ketentuan $x \cap y = \emptyset$ harus dibuktikan $x \subseteq y^c$. Andaikan $x \nsubseteq y^c$. Maka ada a dengan $a \in x$ dan $a \notin y^c$, yaitu ada a dengan $a \in x$ dan $a \in y$. Jadi $x \cap y \neq \emptyset$. Kontradiksi, sebab menurut ketentuan $x \cap y = \emptyset$.

3. Apabila $x \cap z = y \cap z$ dan $x \cup z = y \cup z$ maka $x = y$.

Bukti. $x = x \cap (x \cup z) = x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) =$
$= (x \cap y) \cup (y \cap z) = (y \cap x) \cup (y \cap z) = y \cap (x \cup z) = y \cap (y \cup z)$
$= y$

Perhatikanlah bahwa hukum-hukum yang digunakan adalah berturut-turut : hukum absorpsi, ketentuan, distributivitas, ketentuan, hukum komutatif, distributivitas, ketentuan dan hukum absorpsi.

Catatan : Dari $x \cup z = y \cup z$ saja tidak dapat disimpulkan $x = y$. Demikian juga dari $x \cap z = y \cap z$ saja tidak boleh disimpulkan $x = y$. Dengan kata lain, hukum-hukum kansellasi tidak berlaku. Hal ini diperlihatkan oleh diagram-diagram di bawah ini.

$x \cup z = z = y \cup z$

$x \cap z = z = y \cap z$

Pada gambar kiri terlihat $x \cup z = z = y \cup z$ sedangkan $x \neq y$. Pada gambar kanan terlihat $x \cap z = y \cap z = z$ tetapi juga $x \neq y$.

4. Sederhanakanlah $x \cap (x^c \cup y) \,.\cup.\, y \cap (y \cup z) \,.\cup.\, y$.

Penyelesaian: Dengan menggunakan hukum distributif dan hukum absorpsi maka bentuk di atas sama dengan : $(x \cap x^c) \cup (x \cap y) \cup y \cup y$. Selanjutnya sama dengan $\emptyset \cup (x \cap y) \cup y = y \cup (x \cap y) = y$. Langkah terakhir dengan menggunakan absorpsi.

6.3. LATIHAN

1. Buktikan $x \cup y = S$ bhb $x^c \subseteq y$.
2. Buktikan $x - (x - y) = x \cap y$
3. Buktikan $(x - y)^c = y \cup x^c$
4. Buktikan $x - (y \cap x) = x - y$
5. Buktikan $(x - y) \cup (y - x) = (x \cup y) - (x \cap y)$
6. Apabila $z \subseteq y \subseteq x$ maka $(x - y) \cup (y - z) = x - z$
7. Apabila $x \cap y = x \cap y^c$ maka $x = \emptyset$. Buktikanlah.
8. Buktikan $x = \emptyset$ bhb $(x \cap y^c) \cup (x^c \cap y) = y$
9. Sederhanakanlah $y \cap (x^c \cup y \cup z) \cap u \cap (u \cup v^c)$
10. Buktikan $(x \cap y) \cup (x \cap y^c) = x$ dan
    $(x \cup y) \cap (x \cup y^c) = x$
11. Dengan menggunakan rumus-rumus yang ada sederhanakanlah $(x \cup y) \cap (x^c \cup y) \cap (x^c \cup y^c)$ menjadi $y \cap x^c$.

Catatan. Soal ini dapat diselesaikan dengan memasukkan $x^c \cup y$. Hal ini diperbolehkan mengingat rumus-rumus $x \cap x = x$ dan dan $x \cup x = x$.

12. Buktikan $x \subseteq y \subseteq z \subseteq x$ bhb $x = y = z$.
13. Carilah komplemen dari $x \cup (y^c \cap z) \,.\cup.\, x \cap y \cap x^c$.
14. Apabila x dan y dua himpunan maka x dapat dipecah atas dua himpunan yang saling asing. Yaitu $x = (x - y) \cup (x \cap y)$. Buktikanlah.

15. Apabila $x \subseteq y \cup z$ dan $u \subseteq v$ maka buktikanlah bahwa :
$$(x \cap y^c \cap z^c) \cup (u \cap v^c) = \emptyset.$$

16. Untuk setiap x, y dan z buktikanlah bahwa
$$(y \cup z^c) \cap (z \cup x^c) \cap (x \cup y^c) = (y^c \cup z) \cap (z^c \cup x) \cap (x^c \cup y).$$

17. Apabila $y \cup x = z \cup x$ dan $y \cup x^c = z \cup x^c$ maka buktikanlah bahwa $y = z$.

18. Apabila $y \cap x = z \cap x$ dan $y \cap x^c = z \cap x^c$ maka buktikanlah bahwa $y = z$.

19. Buktikan bahwa $(x \cup y) \cap (x^c \cup y) \cap (y \cup z) = (x \cap z) \cup (z^c \cap y)$.

20. Sederhanakanlah $(x^c \cup y^c) \cap z . \cup . x^c \cap z . \cup . y$.

6/10

7. PERGANDAAN HIMPUNAN

7,1. PASANGAN BERURUTAN

Pada suatu himpunan bersahaja (plain set) urutan tidak diperhatikan. Sehingga umpamanya $\{a, b\} = \{b. a\}$. Perhatikan bahwa suatu elemen muncul satu kali saja sebagai anggota suatu himpunan. Yaitu "kartu keanggotaan" diberikan satu kali saja. Maka ditulis $\{a, b\}$ dan tidak $\{a, a, b\}$.

Sebaliknya pada pasangan berurutan, maka urutan diperhatikan dan anggota boleh diulang. Pasangan-pasangan berurutan memang timbul di dalam matematika. Ingat saja geometri analitik bidang di mana ada titik-titik dengan koordinat (2, 2), (5, 5) dst. Demikian juga dapat didefinisikan n-tupel berurutan. Umpamanya $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ di mana urutan diperhatikan. Perhatikan bahwa untuk membedakan dengan himpunan bersahaja maka notasi dengan kurung kurawal diganti dengan kurung biasa. Kesamaan dua n-tupel berurutan didefinisikan dalam :

DEFINISI : $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bhb $a_i = b_i$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pada khususnya $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ bhb $a_1 = b_1$ dan $a_2 = b_2$.

7.2. PERGANDAAN KARTESIUS

DEFINISI : Dengan hasil ganda Kartesius (Certesian product) H x K dari dua himpunan H dan K dimaksud himpunan semua pasangan berurutan (h, k) dengan $h \in H$ dan $k \in K$.

$$H \times K .\!=\!df. \{(h, k) \mid h \in H \ \& \ k \in K\}$$
$$(h, k) \in H \times K \text{ bhb } h \in H \text{ dan } k \in K$$

Apabila salah satu dari faktor-faktornya sama dengan $\emptyset$ maka H x K didefinisikan sebagai $\emptyset$. Perhatikan bahwa dalam pergandaan di atas faktor-faktornya diperbolehkan sama. Jadi diperbolehkan H = K. Perhatikan juga bahwa pada umumnya H x K tidak sama dengan K x H.

Jika himpunan A mempunyai n anggota & himpunan B memiliki m anggota. Maka A x B memiliki (n x m) anggota

Misalnya $H = \{a, b\}$ dan $K = \{c, d\}$ maka
$H \times K = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$ sedangkan
$K \times H = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$. Karena $(a, c) \neq (c, a)$ maka himpunan $H \times K$ tidak sama dengan $K \times H$. Selanjutnya :
$H \times H = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Pergandaan Kartesius tidak terbatas pada dua himpunan saja. Umumnya ditentukan himpunan-himpunan $H_1, H_2, \ldots, H_n$ maka dengan $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ dimaksud himpunan semua n-tupel $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ dengan $h_i \in H_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Perhatikan juga bahwa pada $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ beberapa dan mungkin semua H_i diperbolehkan sama.

Catatan. Untuk menurunkan rumus-rumus dan menyelesaikan soal-soal tentang hasil ganda Kartesius diperlukan beberapa fakta yaitu :

Himpunan $\{x \mid P(x) \ \& \ Q(x)\}$ terdiri atas elemen-elemen x yang memenuhi syarat keanggotaan : memiliki sifat P dan sekaligus memiliki sifat Q. Himpunan ini sama dengan interseksi himpunan elemen-elemen yang memiliki sifat P saja dengan himpunan elemen-elemen yang memiliki sifat Q saja. Yaitu $\{x \mid P(x)\} \cap \{x \mid Q(x)\}$. Didapat rumus :

$$\{x \mid P(x) \ \& \ Q(x)\} = \{x \mid P(x)\} \cap \{x \mid Q(x)\}$$

Demikian juga :

$$\{x \mid P(x) \ \vee \ Q(x)\} = \{x \mid P(x)\} \cup \{x \mid Q(x)\}$$

RUMUS : $(H \cup K) \times M = H \times M . \cup . K \times M$

Bukti. $(H \cup K) \times M = \{(a, b) \mid a \in H \cup K \ \& \ b \in M\}$
$= \{(a, b) \mid (a \in H \ \vee \ a \in K) \ \& \ b \in M\}$
$= \{(a, b) \mid (a \in H \ \& \ b \in M) \ \vee \ (a \in K \ \& \ b \in M)\}$
$= \{(a, b) \mid a \in H \ \& \ b \in M\} . \cup . \{(a, b) \mid a \in K \ \& \ b \in M\}$
$= H \times M . \cup . K \times M$

Catatan. Pada umumnya $(H \times K) \cup M \neq (H \cup M) \times (K \cup M)$. Ambil misalnya $H = \{h\}$, $K = \emptyset$, $M = \{m\}$ dengan $h \neq m$. Maka $H \times K = \emptyset$, sehingga $(H \times K) \cup M = \emptyset \cup \{m\} = \{m\}$. Dari lain pihak $H \cup M = \{h, m\}$ dan $K \cup M = \{m\}$. Sehingga $(H \cup M) \times (K \cup M) = \{h, m\} \times \{m\} = \{(h, m), (m, m)\}$. Maka terlihat $(H \times K) \cup M \neq (H \cup M) \times (K \cup M)$.

- Jika A dan B adalah elakhimpunan kosong, mak A x B adalah ϕ,
$A = \phi$, $B = \phi$ → $A \times B = \phi$
- Jika H adalah himpunan yg tidak kosong maka hasil ganda thdp dirinya sendiri dinyatakan sbg : $H \times H = H^2$

Contoh 1. Buktikan $H - (K \cup M) = (H - K) \cap (H - M)$

Bukti. $H - (K \cup M) = \{a \mid a \in H \ \& \ a \notin K \cup M\}$
$= \{a \mid a \in H \ \& \ a \notin K \ \& \ a \notin M\}$
$= \{a \mid a \in H \ \& \ a \notin K \ \& \ a \in H \ \& \ a \notin K\}$
$= (H - K) \cap (H - M)$

Sedangkan
$(H - K) \cap (H - M) = \{a \mid a \in H \ \& \ a \notin K\} \cap \{a \mid a \in H \ \& \ a \notin M\}$
$= \{a \mid a \in H \ \& \ a \notin K \ \& \ a \notin M\}$
$= H - (K \cup M)$

Contoh 2. Buktikan $(H_1 \cap H_2) \times (K_1 \cap K_2) = H_1 \times K_1 . \cap . H_2 \times K_2$

Bukti.
$(H_1 \cap H_2) \times (K_1 \cap K_2) = \{(a, b) \mid a \in H_1 \cap H_2 \ . \& . \ b \in K_1 \cap K_2\}$
$= \{(a, b) \mid a \in H_1 \ \& \ a \in H_2 \ \& \ b \in K_1 \ \& \ b \in K_2\}$
$= \{(a, b) \mid a \in H_1 \ \& \ b \in K_1\} \cap \{(a, b) \mid a \in H_2 \ \& \ b \in K_2\}$
$= H_1 \times K_1 . \cap . H_2 \times K_2$

7.3. LATIHAN

1. Buktikan
$(H_1 \cup H_2) \times (K_1 \cup K_2) = H_1 \times K_1 . \cup . H_1 \times K_2 . \quad . H_2 \times K_1 . \quad . H_2 \times K_2$
2. Apabila $M \subseteq H$ dan $N \subseteq K$ maka :
$(M \times K) \cap (H \times N) = M \times N$
3. Buktikan $(H - K) \times M = (H \times M) - (K \times M)$
4. Buktikan bahwa $H \times (K \cup M) = H \times K . \cup . H \times M$ bernilai benar.
5. Selidikilah apakah
$(H \times K) \cap M = H \times M . \cap . K \times M$ bernilai benar ?
6. Selidikilah apakah
$H \times (K \cap M) = H \times K . \cap . H \times M$ bernilai benar ?
7. Selidikilah apakah
$H - (K \cap M) = (H - K) \cup (H - M)$ bernilai benar ?

a∈H & a∉K & b∈M
H − K
(M∩H) x (M∩N) x (K∩H) x (K∩N)
M x ϕ x ϕ x N

8. HIMPUNAN KUASA, KELUARGA HIMPUNAN DAN HIMPUNAN INDEKS

DEFINISI : Dengan himpunan kuasa (power set) dari himpunan H, dengan notasi 2^H, dimaksud himpunan semua himpunan bagian dari H.

Perhatikan bahwa $\emptyset$ dan H sendiri menjadi himpunan bagian dari H. Sehingga, jika $H = \{a, b, c\}$ maka

$$2^H = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

TEOREMA. Apabila H terdiri atas n anggota, dengan n suatu bilangan alam, maka banyaknya anggota dari himpunan kuasa 2^H adalah 2^n.

Bukti. Himpunan kuasa 2^H terdiri atas :

1. Himpunan kosong $\emptyset$, banyaknya 1.
2. Himpunan-himpunan bagian yang terdiri atas satu elemen, banyaknya C_n^1.
3. Himpunan-himpunan bagian yang terdiri atas dua elemen, banyaknya C_n^2.

.

.

.

.. Himpunan-himpunan bagian yang terdiri atas n elemen, banyaknya C_n^n.

Sehingga banyaknya anggota dari 2^H adalah

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$$

Langkah terakhir ini dengan menggunakan beberapa rumus elementer dari teori kombinasi.

DEFINISI : Dengan suatu keluarga himpunan (family of sets) dimaksudkan himpunan yang anggota-anggotanya adalah himpunan-himpunan.

Hukum De Morgan
$(H \cap K)^c = H^c \cup K^c$
$(H \cup K)^c = H^c \cap K^c$

Enumerasi = aturan persamaan

Himpunan kuasa dari suatu himpunan merupakan keluarga himpunan. Untuk menyajikan anggota-anggota suatu keluarga maka diperlukan nama-nama dari para anggotanya. Biasanya digunakan himpunan indeks I, yang tidak lain adalah himpunan nama-nama. Demikianlah umpamanya, apabila $I = \{1, 2, 3\}$ maka dengan $\{H_i\}_{i \in I}$ dimaksud $\{H_1, H_2, H_3\}$ di mana setiap H_i adalah himpunan.

DEFINISI : Apabila himpunan indeks $I = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ maka dengan $(\sqcap_i H_i)_{i \in I}$ dimaksud $H_\alpha \cap H_\beta \cap H_\gamma \cap \ldots$

Sedangkan dengan $(\sqcup_i H_i)_{i \in I}$ dimaksud $H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma \cup \ldots$

TEOREMA. Apabila $I = \emptyset$ maka $(\sqcap_i H_i)_{i \in I} = S$ dan $(\sqcup_i H_i)_{i \in I} = \emptyset$

Bukti. Perhatikan $x \in (\sqcap_i H_i)_{i \in \emptyset}$ <u>bhb</u> (Ai). $i \in \emptyset \implies x \in H_i$.

Ruas kanan dari bi-implikasi ini pasti bernilai benar sebab $i \in \emptyset$ pasti salah. Sehingga untuk setiap x dari semestanya berlakulah $x \in (\sqcap_i H_i)_{i \in \emptyset}$. Jadi $(\sqcap_i H_i)_{i \in \emptyset} = S$.

Sekarang perhatikan $x \in (\sqcup_i H_i)_{i \in \emptyset}$ <u>bhb</u> (Ei). $i \in \emptyset$ & $x \in H_i$.

Ruas kanan dari bi-implikasi ini pasti bernilai salah karena $\emptyset$ tidak mempunyai anggota. Sehingga untuk setiap x dari semestanya berlakulah $x \in (\sqcup_i H_i)_{i \in \emptyset}$ bernilai salah juga, jadi $(\sqcup_i H_i)_{i \in \emptyset} = \emptyset$.

Catatan. Beberapa penulis menggunakan notasi $(\sqcap_{i \in I} H_i)$ untuk notasi $(\sqcap_i H_i)_{i \in I}$. Apabila I diketahui sering juga disingkat $\sqcap_i H_i$ saja.

Dengan menggunakan himpunan indeks, yang dapat merupakan himpunan dengan tak terhingga banyaknya anggota, operasi-operasi pada himpunan seperti interseksi, union dst beserta rumus-rumusnya dapat digeneralisasi.

Misalnya $(\sqcap_i H_i)^c = \sqcup_i H_i^c$ dan $(\sqcup_i H_i)^c = \sqcap_i H_i^c$ yang disebut generalized de Morgan laws.

Kita buktikan yang pertama demikian,

$(\sqcap_i H_i)^c = (H_\alpha \cap H_\beta \cap H_\gamma \cap \ldots)^c$ sedangkan $\sqcup_i H_i^c = H_\alpha^c \cup H_\beta^c \cup H_\gamma^c \cup \ldots$

$(\sqcap_i H_i)^c = \sqcup_i H_i^c$

Bukti $(\sqcap_i H_i)^c = (H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap \ldots)^c = (H_1 \cap (H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap \ldots))^c$

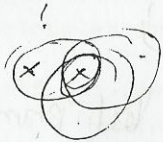
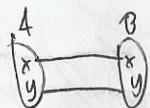
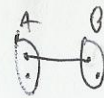
$= H_1^c \cup (H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap \ldots)^c$

$= H_1^c \cup H_2^c \cup (H_3 \cap H_4 \cap \ldots)^c$

Sehingga apabila $x \in (\sqcap_i H_i)^c$ maka x tidak sekaligus dalam $H_\alpha \cap H_\beta \cap H_\gamma \cap \ldots$. Jadi ada indeks i, katakan α, dengan $x \in H_\alpha^c$. Maka $x \in \sqcup_i H_i^c$.

Sebaliknya, apabila $x \in \sqcup_i H_i^c$ maka x dalam salah satu H_i^c, katakanlah H_α^c. Sehingga x tidak dalam $(H_\alpha \cap H_\beta \cap H_\gamma \cap \ldots)$ yaitu $x \in (\sqcap_i H_i)^c$.

LATIHAN

1. Tentukan himpunan kuasa dari $H = \{a, b, c, d\}$. Mempat berapa anggotakah ?
2. Apabila himpunan indeks $I = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ maka buktikan bahwa $(\sqcup_i H_i)^c = \sqcap_i H_i^c$.
3. Untuk setiap himpunan K dan setiap himpunan indeks I berlakulah
   $K \cup (\sqcap_i H_i) = \sqcap_i (K \cup H_i)$ dan $K \cap (\sqcup_i H_i) = \sqcup_i (K \cap H_i)$.

VI. RELASI DAN FUNGSI

1. PENGERTIAN RELASI

Sebelum mendefinisikan relasi secara tepat sebagai himpunan, maka pengertian relasi untuk sementara dibicarakan contoh-contoh dari percakapan sehari-hari.

Misalkan ditentukan suatu semesta $M = \{a, b, \ldots\}$. Maka relasi R dinyatakan determinatif pada M bhb untuk setiap a, b dalam M, kalimat a R b (dibaca sebagai "a berada dalam relasi R dengan b") mempunyai nilai benar atau salah. Misalnya, apabila M itu himpunan bilangan-bilangan alam, maka relasi kelipatan adalah determinatif pada M. Sedangkan relasi mencintai tidaklah determinatif, sebab kalimat "2 mencintai 3" tidak mempunyai nilai benar, salahpun tidak. Walaupun grammatikal mempunyai bentuk kalimat, namun kalimat di atas hanya rangkaian kata-kata tanpa arti. Yang akan dibicarakan hanyalah relasi-relasi yang determinatif.

Relasi yang menyangkut dua anggota disebut relasi biner, dengan notasi a R b atau R(a,b). Apabila a tidak berada dalam relasi R dengan b maka hal ini dinyatakan dengan notasi $a \not R b$ atau $\overline{a R b}$. Apabila menyangkut tiga anggota maka relasinya disebut relasi triadik. Misalnya, apabila semesta adalah himpunan orang-orang maka kalimat "Jono iri hati pada Tono karena sikap si cantik Siti" merupakan suatu relasi triadik, yang dapat disajikan dengan R(J,T,S). Demikian juga pada himpunan bilangan-bilangan, maka operasi biner penjumlahan dapat dipandang sebagai relasi triadik, misalnya 2 + 3 = 5 dapat disajikan sebagai R(2, 3, 5). Relasi R di sini ialah R(a, b, c) : jumlah a dengan b adalah c. Sedangkan $2 + 3 \neq 4$ dinyatakan dengan $\not R(2, 3, 4)$ atau $\overline{R(2, 3, 4)}$ yaitu 2, 3 dan 4 (urutan diperhatikan) tidak berada dalam relasi penjumlahan.

2. RELASI EKUIVALENSI

DEFINISI : Relasi R disebut refleksif bhb untuk setiap a dari semestanya M berlaku a R a.

* R refleksif bhb $(\forall a \in M)$. a R a

Relasi mencintai antara orang-orang adalah refleksif, sebab setiap orang mencintai diri sendiri. Suatu relasi disebut non-refleksif bhb sekurang-kurangnya ada satu anggota a yang tidak berada dalam relasi R dengan diri sendiri, yaitu $(Ea). a \not R a$. Misalnya menguasai diri adalah relasi non-refleksif karena ada orang yang tidak dapat menguasai diri. Suatu relasi disebut irrefleksif bhb $(Aa). a \not R a$. Misalnya relasi $>$ pada bilangan-bilangan.

DEFINISI : Relasi R disebut simetris bhb untuk setiap a, b dari semesta M berlakulah $a R b \Longrightarrow b R a$.

$$R \text{ simetris bhb } (Aa,b).\ a R b \Longrightarrow b R a$$

Relasi kesejajatan antara garis-garis adalah simetris. Relasi R disebut non-simetris bhb sekurang-kurangnya ada satu pasang (a,b) dengan $a R b$ tetapi $b \not R a$. Umpamanya mencintai. R disebut a-simetris bhb $(Aa,b).\ a R b \Longrightarrow b \not R a$. Misalnya relasi $>$ antara bilangan-bilangan . Relasi R disebut anti-simetris bhb $(Aa,b).\ a R b \ \& \ b R a \Longrightarrow a = b$. Umpamanya relasi inklusi antar himpunan.

Catatan. Misalkan semesta M terdiri atas tepat dua garis yang tidak sejajar satu sama lain. Maka perhatikan bahwa relasi kesejajaran R berlaku untuk semesta ini. Sebab untuk semua pasangan anggota berlaku benarnya kalimat $a R b \Longrightarrow b R a$. Kalimat ini benar karena antesedennya salah.

DEFINISI . Relasi R disebut transitif bhb untuk setiap tripel a,b,c dari semesta M berlakulah apabila $a R b$ dan $b R c$ maka $a R c$.

$$R \text{ transitif bhb } (Aa,b,c).\ a R b \ \& \ b R c \Longrightarrow a R c$$

Umpamanya relasi kesejajaran antara garis-garis lurus. Apabila sekurang-kurangnya ada satu tripel dengan $a R b$ dan $b R c$ tetapi tidak $a R c$ maka relasinya disebut non-transitif. Misalnya relasi mencintai pada orang-orang. Apabila untuk setiap tripel berlaku, jika $a R b$ dan $b R c$ pastilah $a \not R c$, maka R disebut in-transitif. Misalnya relasi tegaklurus antara garis-garis pada bidang.

DEFINISI : Relasi R yang sekaligus memiliki sifat-sifat refleksif, simetris dan transitif disebut relasi ekuivalensi

Dalam matematika relasi ekuivalensi memegang peranan yang sangat penting. Banyak sekali relasi yang merupakan relasi ekuivalensi. Umpamanya relasi kesejajaran antara garis-garis lurus, relasi kesebangunan bentuk-bentuk geometri, dst. Kita bicarakan sekarang relasi kongruensi antara bilangan-bilangan bulat.

Apabila semesta M terdiri atas bilangan-bilangan bulat maka relasi kongruensi antara anggota-anggotanya didefinisikan demikian :

DEFINISI : Misalkan $M = \{a, b, \ldots\}$ adalah himpunan bilangan-bilangan bulat. Maka dikatakan bahwa a kongruen b modulo m (di mana m bilangan alam) bhb $a - b$ adalah kelipatan m.

Sifat refleksi dipenuhi sebab $a - a = 0.m$. Sehingga $a \equiv a \pmod m$. Sifat simetrispun dipenuhi, sebab jika $a - b = k.m$ maka $b - a = -k.m$ sehingga $a \equiv b \Longrightarrow b \equiv a \pmod m$. Akhirnya sifat transitif juga dipenuhi. Sebab jika $a - b = k_1.m$ dan $b - c = k_2.m$ maka dengan menjumlah didapat $a - c = (k_1 + k_2).m$. Sehingga terbukti bahwa $a \equiv b \ \& \ b \equiv c \Longrightarrow a \equiv c \pmod m$.

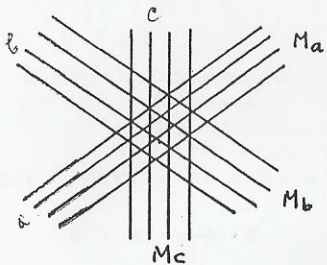
TEOREMA. Suatu relasi ekuivalensi antara anggota-anggota semesta M mengakibatkan adanya penggolongan dalam didalam M.

Dengan suatu penggolongan di dalam M dimaksud, bahwa M terbagi atas himpunan-himpunan bagian (golongan, kelas) masing-masing tidak kosong dan yang saling asing (mutually disjoint), sedemikian hingga setiap anggota dari M berada dalam satu dan hanya satu golongan dari M.

Bukti. Misalkan relasi ekuivalensi di atas disebut R. Kita kumpulkan semua elemen-elemen yang berada dalam relasi R dengan a dalam suatu himpunan M_a. Jadi $M_a = \{x \mid x R a\}$. Himpunan M_a tidaklah kosong, sebab karena R mempunyai sifat refleksif maka $a R a$ dan M_a sekurang-kurangnya mempunyai satu anggota, yaitu a. Dengan kata lain setiap anggota berada dalam sekurang-kurangnya satu kelas.

Sekarang dibuktikan kalimat "Apabila dua kelas itu berserikat sekurang-kurangnya satu elemen maka dua kelas itu berimpitan. . . . (I)
Sebab andaikan M_a dan M_b berserikat elemen c. Karena $c \in M_a$ maka c R a . Karena R simetris maka dari c R a diturunkan a R c. Dari sebab $c \in M_b$ maka juga c R b. Dari a R c dan c R b dengan menggunakan sifat transitif didapat a R b. Ambil anggota sembarang $p \in M_a$. Maka p R a dan karena a R b juga maka p R b. Sehingga $p \in M_b$. Terbukti setiap anggota M_a adalah anggota M_b. Yaitu terbukti bahwa $M_a \subseteq M_b$.
Dengan jalan yang sama (atau pengamatan bahwa persoalannya simetris dalam a dan b) maka juga $M_b \subseteq M_a$. Dari $M_a \subseteq M_b$ dan $M_b \subseteq M_a$ disimpulkan $M_a = M_b$. Sehingga benarnya kalimat (I) terbukti.

Kontraposisi dari kalimat (I) berbunyi "Apabila kelas-kelas itu tidak berimpitan maka mereka tidak berserikat satu elemenpun. Jadi saling asing.

Kelas-kelas atau golongan-golongan itu disebut kelas-kelas atau golongan-golongan ekuivalensi. Kelas-kelas itu sering disajikan dengan notasi $\bar{a}$, $\bar{b}$ dst di mana kelas $\bar{a}$ memuat elemen a dst. Keluarga himpunan $\bar{M}$ yang mempunyai kelas-kelas-kelas $\bar{a}$, $\bar{b}$ dst sebagai anggota disebut himpunan kuosen.

Sebagai contoh sederhana diambil relasi ekuivalensi kesejajaran antara garis-garis di bidang datar. Sebagian dari kelas-kelas ekuivalensi dilukiskan dalam gambar di samping ini.

TEOREMA : Apabila dalam semesta M terdapat suatu penggolongan sedemikian hingga setiap anggota berada dalam satu kelas dengan kelas-kelas itu saling asing, maka sekurang-kurangnya ada satu relasi R yang mengakibatkan penggolongan tadi.

Bukti. Ambillah sebagai R relasi <u>berada dalam satu kelas</u>, Maka dengan mudah dapat dilihat bahwa R ini merupakan relasi ekuivalensi yang mengakibatkan penggolongan di atas.

LATIHAN

1. Di dalam himpunan bilangan riel didefinisikan relasi R dengan rumus, a R b <u>bhb</u> $a^2 = b^2$. Perlihatkan bahwa R itu suatu relasi ekuivalensi. Manakah kelas-kelas ekuivalensinya ?

2. Berilah contoh relasi yang simetris dan transitif tetapi tidak refleksif.

3. Carilah contoh relasi yang :
   a. refleksif dan simetris tetapi tidak transitif.
   b. refleksif dan transitif tetapi tidak simetris.

4. Carilah contoh relasi yang :
   a. refleksif tetapi tidak simetris dan transitif.
   b. simetris tetapi tidak refleksif dan transitif.
   c. transitif tetapi tidak refleksif dan simetris.

5. Suatu relasi R disebut berlingkar bhb untuk setiap a,b dan c dari semestanya berlaku a R b & b R c ==> c R a. Buktikan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi bhb R refleksif dan berlingkar.

6. Di dalam himpunan bilangan bulat $\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ didefinisikan relasi R dengan rumus a R b bhb $a^2 + a = b^2 + b$. Buktikan R suatu relasi ekuivalensi dan tentukan kelas-kelas ekuivalensinya.

7. Dengan menggunakan relasi R pada himpunan S didefinisikan relasi baru R* dengan rumus : a R* b bhb a R b v b R a. Buktikan bahwa R* adalah simetris.

3. FUNGSI ATAU PEMETAAN (MAPPING)

Sekarang didefinisikan salah satu konsep yang amat penting didefinisikan salah satu konsep yang sangat penting dalam keseluruhan matematika, yaitu konsep fungsi atau pemetaan.

DEFINISI. Suatu fungsi dari himpunan S ke himpunan T adalah suatu aturan yang pada setiap $a \in S$ dengan tunggal menentukan satu $t \in T$.

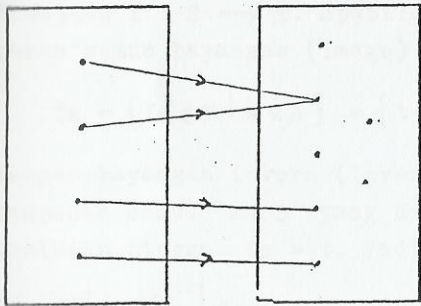



Diagram Venn fungsi dari S ke T telukis di samping ini. Apabila diagram fungsi ini dibandingkan dengan diagram Venn suatu relasi dari S ke T, maka terlihat bahwa suatu fungsi adalah kejadian khusus dari suatu relasi. Yaitu pertama, pada suatu fungsi <u>semua</u> anggota S "<u>dihabiskan</u>" (<u>setiap</u> anggota S mempunyai kawan), kedua, kawannya suatu $s \in S$ dari T adalah <u>tunggal</u>. Hal ini tidak perlu berlaku pada suatu relasi umum.

Fungsi f dari S ke T disajikan dengan notasi :

$$f : S \longrightarrow T$$

$$s \longmapsto f(s)$$

Hasil f(s) ini juga dapat disajikan dengan fs atau (f)s. Himpunan S disebut <u>domain</u> atau daerah asal dari f, sedangkan T disebut <u>kodomain</u> atau daerah kawan dari fungsi itu.

Kawan dari s yang berasal dari T yang tunggal itu disebut <u>bayangan</u> (image) dari elemen s, disajikan dengan f(s). Sering juga disingkat dengan fs saja, tanpa tanda kurung. Perhatikan sekali lagi bahwa tidak usah semua $t \in T$ mempunyai kawan di S. Dan jika t itu mempunyai kawan s maka s tidak usah tunggal. Maka dari itu suatu fungsi f dari S ke T dapat juga didefinisikan dengan rumus

$$f : S \longrightarrow T \ \underline{bhb} \ (As)(E!t \in T).\ fs = t$$

Contoh 1. Ambil sebagai S himpunan dadu-dadu $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ sedangkan sebagai T : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Setiap lemparan menghasilkan suatu fungsi $f : S \longrightarrow T$. Misalnya dadu D_1 jatuh dengan muka 3 di atas. Maka $D_1 \longmapsto 3$ dst.

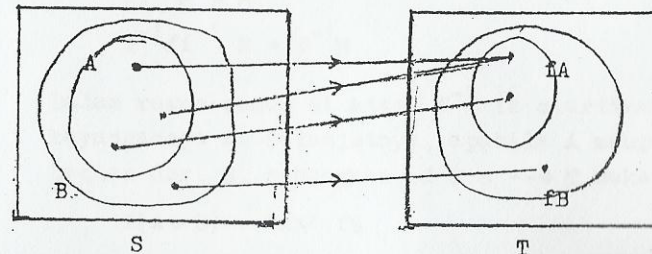
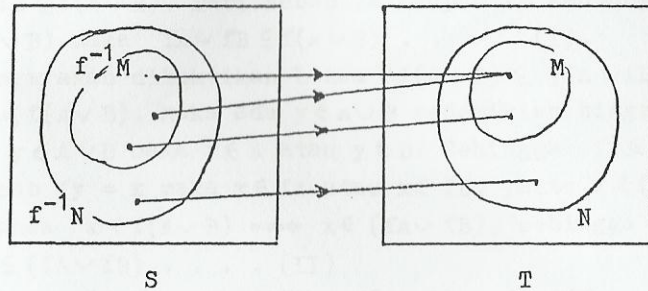
Contoh 2. Ambil sebagai X himpunan bilangan riel dan sebagai Y juga himpunan bilangan riel. Maka rumus $y = x^2$ menentukan suatu fungsi $f : X \longrightarrow Y$ dari bilangan-bilangan riel ke bilangan-bilangan riel. Misalnya $2 \longmapsto f(2) = 2^2 = 4$,

$$-2 \longmapsto f(-2) = (-2)^2 = 4 \text{ dst.}$$

Sebagaimana dengan suatu relasi R maka maka fungsi f, katakan $f : S \longrightarrow T$ dapat juga dipandang sebagai himpunan bagian dari S x T. Akan tetapi yang memenuhi sifat-sifat tertentu, yaitu :

DEFINISI. Himpunan bagian $f \subseteq S \times T$ disebut fungsi dari S ke T dengan notasi $f : S \longrightarrow T$ <u>bhb</u> dipenuhi

1. Untuk semua $s \in S$ ada $t \in T$ sedemikian hingga $(s,t) \in f$.
2. Apabila (s, t_1) dan (s, t_2) keduanya dalam f maka $t_1 = t_2$.

4. BAYANGAN DAN BAYANGAN INVERS

Misalkan $f : S \longrightarrow T$. Apabila $A \subseteq S$ maka dengan fA dimaksud himpunan semua bayangan (image) dari anggota-anggota A. Jadi

$$fA = \{ fs \in T \mid s \in A \} = \{ t \mid (Es \in A).\ fs = t \}$$

Dengan bayangan invers (invers image) dari elemen $t \in T$ dimaksud himpunan semua $s \in S$ yang dibawa ke t, yaitu himpunan semua s sedemikian hingga $fs = t$. Jadi

$$f^{-1}t = \{ s \mid fs = t \}$$

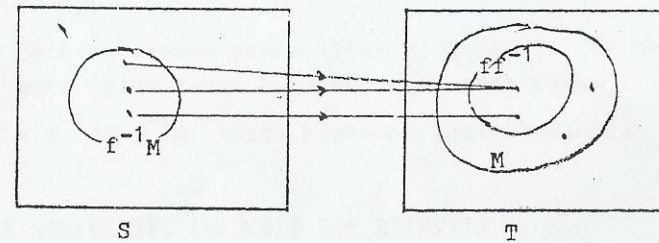
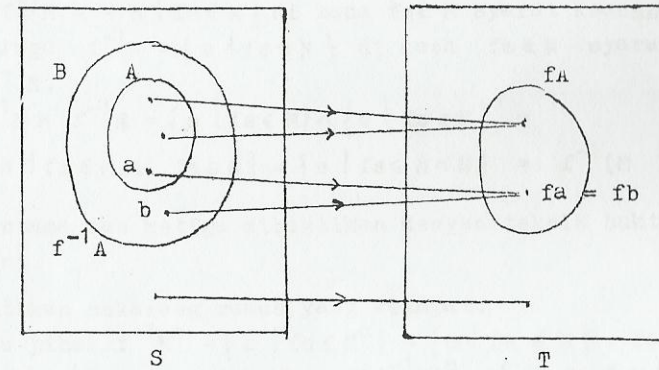
Perhatikan bahwa pada umumnya f^{-1} merupakan suatu himpunan. Sehingga f^{-1} bukanlah fungsi dari T ke S. Apabila $M \subseteq T$ maka dengan $f^{-1}M$ dimaksud himpunan semua bayangan invers dari anggota-anggota M. Jadi bayangan invers dari M adalah

$$f^{-1}M = \{ s \mid fs \in M \}$$

Langsung dari definisi dengan langkah logika yang sederhana didapat :

RUMUS $A \subseteq B \implies fA \subseteq fB$

$M \subseteq N \implies f^{-1}M \subseteq f^{-1}N$

Selanjutnya apabila $a \in A$ maka mungkin ada $b \notin A$ sedemikian hingga $fb = fa$, seperti terlihat pada diagram berikut. Demikian juga jika $M \subsetneq T$ maka mungkin ada anggota-anggota M yang tidak mempunyai kawan di S.

Sehingga didapat rumus :

$$A \subseteq f^{-1}fA$$

$$ff^{-1}M \subseteq M$$

$$f^{-1}ff^{-1}M = f^{-1}M$$

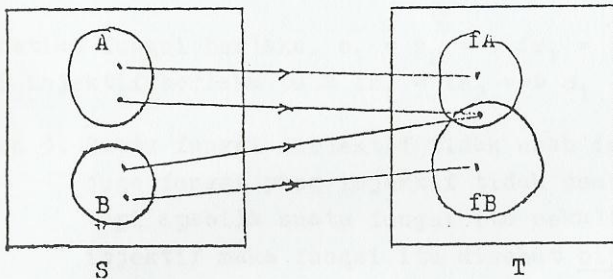
Dalam rumus-rumus di atas $f^{-1}fA$ diartikan bayangan invers dari bayangannya A. Selanjutnya, apabila A maupun B merupakan himpunan bagian dari S, sedangkan $f : S \dashrightarrow T$ maka berlaku rumus-rumus :

$$f(A \cup B) = fA \cup fB$$

$$f(A \cap B) \subseteq fA \cap fB$$

Bukti. Karena $A \subseteq A \cup B$ maka $fA \subseteq f(A \cup B)$. Karena $B \subseteq A \cup B$ maka juga $fB \subseteq f(A \cup B)$. Dari sebab fA maupun fB keduanya termuat dalam $f(A \cup B)$ maka $fA \cup fB \subseteq f(A \cup B)$ . . . . (I).

Sebaliknya akan dibuktikan bahwa $f(A \cup B) \subseteq (fA \cup fB)$, demikian :
Ambil $x \in f(A \cup B)$. Maka ada $y \in A \cup B$ sedemikian hingga $fy = x$.
Karena $y \in A \cup B$ maka $y \in A$ atau $y \in B$. Sehingga $fy \in fA$ atau $fy \in fB$.
Dari sebab $fy = x$ maka $x \in fA$ atau $x \in fB$, yaitu $x \in (fA \cup fB)$. Terbukti bahwa $x \in f(A \cup B) \Longrightarrow x \in (fA \cup fB)$, sehingga
$f(A \cup B) \subseteq (fA \cup fB)$ . . . . (II)
Maka (I) dan (II) menghasilkan $f(A \cup B) = fA \cup fB$.

Dengan jalan yang sama dibuktikan $f(A \cap B) \subseteq (fA \cap fB)$. Akan tetapi berlainan dengan rumus sebelumnya, tanda kesamaan tidak mesti berlaku. Diagram Venn di bawah ini memperlihatkan bahwa inklusi murni dapat terjadi. Sebab $A \cap B = \emptyset$.

Sehingga $f(A \cap B) = \emptyset$ juga. Pada hal $fA \cap fB \neq \emptyset$. Maka $f(A \cap B) \subsetneq fA \cap fB$ dengan $f(A \cap B) \neq fA \cap fB$.

Selanjutnya apabila M maupun N merupakan himpuman-himpunan bagian dari T, sedangkan $f : S \dashrightarrow T$ maka berlakulah rumus-rumus di bawah ini :

$$f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}M \cup f^{-1}N$$
$$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}M \cap f^{-1}N$$
$$f^{-1}(M - N) = f^{-1}M - f^{-1}N$$
$$f^{-1}(M^c) = (f^{-1}M)^c$$

Dalam rumus terakhir ini komplementasi dalam ruas kiri diambil terhadap T sedangkan komplementasi dalam ruas kanan, diambil terhadap S.

Bukti. $f^{-1}M = \{ s \mid fs \in M \}$ di mana $fs \in M$ syarat keanggotaan $f^{-1}M$. Juga $f^{-1}N = \{ s \mid fs \in N \}$ di mana $fs \in N$ syarat keanggotaan $f^{-1}N$.

Maka $f^{-1}M \cap f^{-1}N = \{ s \mid fs \in M \} \cap \{ s \mid fs \in N \} =$
$\{ s \mid fs \in M . \&. fs \in N \} = \{ s \mid fs \in M \cap N \} = f^{-1}(M \; N)$

Rumus pertama dan ketiga dibuktikan dengan teknik bukti yang sama dengan ini.

Kita buktikan sekarang rumus yang keempat.
Dari satu pihak $f^{-1}M^c = \{ s \mid fs \in M^c \} = \{ s \mid fs \notin M \}$. Dari pihak lain $f^{-1}M = \{ s \mid fs \in M \}$. Sehingga $(f^{-1}M)^c = \{ s \mid fs \notin M \}$.
Karena syarat keanggotaan $f^{-1}M^c$ dan $(f^{-1}M)^c$ sama, terbukti bahwa $f^{-1}M^c = (f^{-1}M)^c$.

Catatan. Berbeda dengan rumus $f(A \cup B) \subseteq fA \cup fB$ di mana tanda kesamaan belum tentu berlaku, maka pada rumus :
$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}M \cap f^{-1}N$ tanda kesamaan pasti berlaku.

4. FUNGSI SURJEKTIF, INJEKTIF DAN BIJEKTIF

Biasanya fungsi $f : S \longrightarrow T$ tidak "menghabiskan" himpunan T artinya ada $t \in T$ yang tidak mempunyai kawan di dalam S. Apabila T dihabiskan yaitu setiap $t \in T$ sekurang-kurangnya mempunyai satu kawan di dalam S, maka f disebut <u>surjektif</u>, Sehingga :

DEFINISI. $f : S \longrightarrow T$ surjektif <u>bhb</u> $(At)(Es).\; fs = t$
<u>bhb</u> $fS = T$
<u>bhb</u> $f^{-1}t \neq \emptyset$

Fungsi surjektif disebut juga fungsi yang <u>onto</u>.

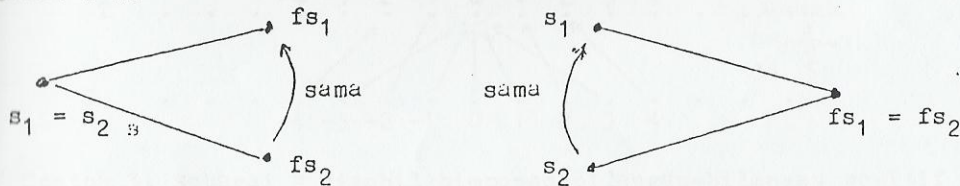
Demikian juga pada fungsi $f : S \longrightarrow T$ suatu anggota $t \in T$, mungkin mempunyai lebih dari satu kawan di S. Apabila setiap $t \in T$ tepat mempunyai satu kawan di S atau sama sekali tidak mempunyai kawan di S maka f disebut fungsi yang <u>injektif</u>.

DEFINISI. $f : S \longrightarrow T$ injektif bhb $(As_1, s_2).\ fs_1 = fs_2 \Longrightarrow s_1 = s_2$

bhb $(As_1, s_2).\ s_1 \neq s_2 \Longrightarrow fs_1 \neq fs_2$

bhb $f^{-1}t = \emptyset$ atau merupakan singleton

Catatan 1. Suatu singleton ialah himpunan yang tepat mempunyai satu anggota.

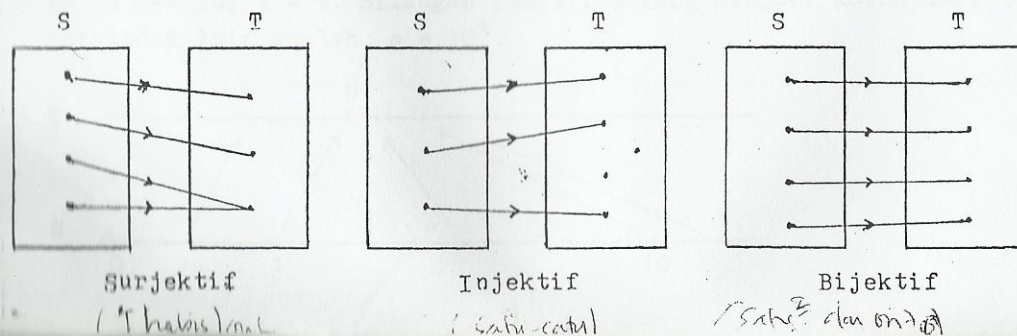
Catatan 2.

Setiap fungsi Fungsi injektif

Pada setiap fungsi berlaku, $s_1 = s_2 \Longrightarrow fs_1 = fs_2$ sedangkan untuk fungsi injektif berlaku pula $fs_1 = fs_2 \Longrightarrow s_1 = s_2$.

Catatan 3. Suatu fungsi surjektif tidak usah injektif, sebaliknya juga fungsi yang injektif tidak usah surjektif. Akan tetapi apabila suatu fungsi itu sekaligus surjektif dan injektif maka fungsi itu disebut bijektif.

DEFINISI. Fungsi $f : S \longrightarrow T$ disebut bijektif bhb fungsi itu sekaligus surjektif dan injektif.

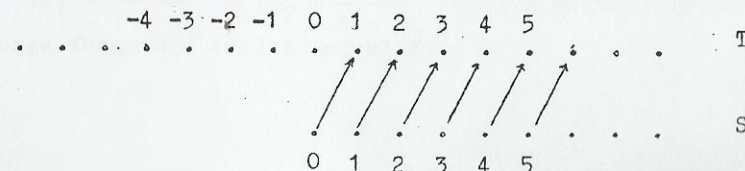
Di bawah ini disajikan diagram Venn untuk ketiga jenis fungsi di atas.

Surjektif Injektif Bijektif

Pada $f : S \longrightarrow T$ yang bijektif ada korespondensi satu-satu antara anggota-anggota S dengan anggota-anggota T. Dikatakan bahwa S ekuivalen dengan T, dengan notasi $S \sim T$.

Catatan 4. Untuk membuktikan bahwa $S \sim T$ maka harus dibuktikan adanya fungsi f yang surjektif dan injektif. Cara lain yang sering dipakai ialah mencari suatu aturan yang pada setiap $s \in S$ menentukan dengan tunggal satu anggota dari T dan sebaliknya mencari aturan yang pada setiap $t \in T$ menentukan dengan tunggal satu anggota dari S sedemikian hingga aturan kedua ini merupakan kebalikan dari yang pertama. Umpamanya $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dan $T = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Aturan pertama : $n \in S$ dikawankan dengan $2n \in T$. Aturan kedua : $2n \in T$ dikawankan dengan $\frac{1}{2}.n = n \in S$. Aturan kedua ini merupakan kebalikan dari yang pertama. Sehingga terbukti $S \sim T$ dan sekaligus diperoleh fungsi invers yang didefinisikan di bawah ini.

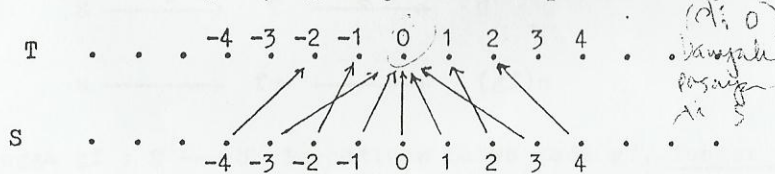
Catatan 5. Apabila $f : S \rightarrow T$ maka pada umumnya f^{-1} bukanlah suatu fungsi dari T ke S. Akan tetapi apabila bijektif maka f^{-1} merupakan fungsi dari T ke S. Disebut fungsi invers dari f.

Catatan 6. Apabila f surjektif maka berlakulah $ff^{-1}M = M$ dengan tanda kesamaan berlaku. Perhatikan juga, apabila apabila $M = \{t\}$ suatu singleton (himpunan yang terdiri atas satu elemen) maka $ff^{-1}(t) = t$ berlaku untuk setiap fungsi. Akan tetapi $f^{-1}fs = s$ hanya berlaku jika f injektif. Gambarlah diagram Venn untuk meyakini hal ini.

Contoh 1. Apabila S himpunan bilangan-bilangan bulat non-negatif sedangkan T himpunan semua bilangan bulat, yaitu positif, nol dan negatif, maka fungsi $f : s \longmapsto s + 1 = fs$ adalah fungsi yang injektif tetapi tidak surjektif.

Contoh 2. Sebagai S diambil himpunan semua bilangan bulat dan sebagai T demikian juga. Fungsi $f : S \longrightarrow T$ ditentukan dengan rumus-rumus :

$$n \longmapsto 0 = fn \text{ jika } n \text{ ganjil}$$

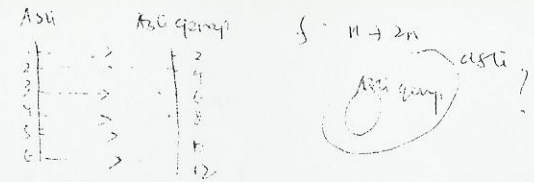
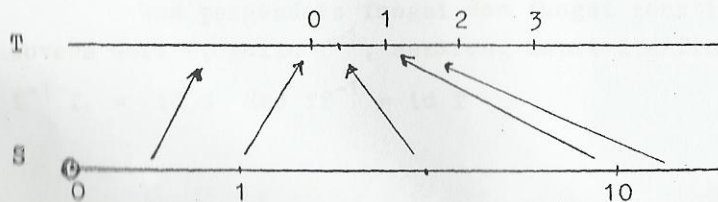
$$n \longmapsto \frac{n}{2} = fn \text{ jika } n \text{ genap}$$

Maka f adalah fungsi yang surjektif tetapi tidak injektif.

Contoh 3. Sebagai S diambil himpunan bilangan-bilangan positif sedangkan sebagai T himpunan bilangan riel. Maka perkawanan s dengan fs = log s merupakan fungsi $f : S \longrightarrow T$ yang bijektif.

Tidak semua perkawaman merupakan fungsi. Ingatlah misalnya perkawanan berdiam sekampung antara anggota-anggota S dengan anggota-anggota T. Supaya perkawanan itu merupakan fungsi maka harus diperlihatkan bahwa setiap s mempunyai kawan tunggal di dalam T. Pada contoh di atas hal ini berlaku sebab:

$s_1 = s_2 \Longrightarrow \log s_1 = \log s_2$ dengan log s berada dalam T untuk setiap $s \in S$.

Fungsi f di atas injektif, sebab jika $\log s_1 = \log s_2$ (= p) maka $s_1 = 10^p = s_2$. Jadi $\log s_1 = \log s_2 \Longrightarrow s_1 = s_2$.

Fungsi f juga surjektif, sebab untuk setiap bilangan riel, yaitu anggota T, dapat ditemukan anggota $s \in S$ sedemikian sehingga $s \longmapsto \log s = t$. Bilangan positif s yang menjadi kawan dari t ini tidak lain adalah $s = 10^t$.

Karena f injektif dan surjektif maka f bijektif. Maka menurut pertimbangan di atas maka fungsi inversdari f yaitu f^{-1} adalah $f^{-1} : t \longrightarrow f^{-1}t = 10^t$.

Contoh 4. Suatu fungsi bijektif yang sangat penting ialah fungsi identitas, yang membawa setiap anggota S ke dirinya sendiri, yang disajikan dengan id S. Jadi

$$\text{id } S : S \longrightarrow S$$

$$s \longrightarrow (\text{id } S)s = s$$

Contoh 5. Ditentukan S adalah himpunan bilangan riel antara 0 dan 1, sedangkan T himpunan semua bilangan riel.

Elemen $x \in S$ dikawankan dengan $\frac{x}{1 - x} \in T$. Apakah perkawanan ini merupakan fungsi ? Apabila demikian, apakah surjektif atau bijektif ?

Penyelesaian. Benar suatu fungsi sebab semua anggota dari S menentukan dengan tunggal satu anggota dari T.

Untuk menyelidiki apakah fungsi itu surjektif kita lakukan demikian. Ambil $r \in T$. Jika ia mempunyai kawan x maka $x \longrightarrow \frac{x}{1 - x} = r$. Dari persamaan $\frac{x}{1 - x} = r$ didapat $r - rx = x$ dan $x = \frac{r}{1 + r}$. Terlihat bahwa $r = -1$ tidak mempunyai kawan di S. Sehingga fungsinya tidaklah surjektif. Untuk menentukan apakah fungsinya injektif maka diselidiki apakah $fx_1 = fx_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$ berlaku ataukah tidak.

Dari $fx_1 = \frac{x_1}{1 - x_1} = fx_2 = \frac{x_2}{1 - x_2}$ dengan mudah didapat $x_1 = x_2$.

Sehingga fungsinya adalah injektif.

5. PERGANDAAN (KOMPOSISI) FUNGSI

Untuk dua fungsi f dan g didefinisikan pergandaan, dan dikatakan dapat digandakan menjadi g f bhb kodomain f sama dengan domain g. Jadi misalnya $f : S \longrightarrow T$ dan $g : T \longrightarrow U$. Maka perhatikan diagram-diagram berikut :

$$S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$$

$$s \longrightarrow fs \longrightarrow (gf)s$$

Sehingga gf : S --- U. Perhatikan bahwa pada gf, fungsi f dikerjakan terlebih dahulu, kemudian menyusul g. Apabila kodomain f $\neq$ domain g maka pergandaan gf tidak didefinisikan.

DEFINISI. Dua fungsi f dan g dengan domain berserikat, jadi misalnya $f : S \longrightarrow T$ dan $g : S \longrightarrow U$ dikatakan sama bhb untuk setiap $a \in S$ maka fs = gs.

Dengan demikian $f \neq g$ bhb $fs \neq gs$.

TEOREMA. Apabila pergandaan dapat dilakukan masing-masing maka pergandaan fungsi itu mempunyai sifat assosiatif, yaitu berlaku (gf)h = g(fh).

$$S \xrightarrow{h} T \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} V$$

Bukti. Dari satu pihak $((gf)h)(s) = (gf)(hs) = g(f(hs))$.

Dari lain pihak $(g(fh))(s) = g((fh)s) = g(f(hs))$.

Karena berlaku untuk setiap s maka terbukti (gf)h = g(fh).

Catatan. Telah kita observasi bahwa apabila $f : S \longrightarrow T$ bijektif maka f^{-1} merupakan fungsi dari T ke S. Dengan menggunakan pergandaan fungsi dan fungsi identitas maka fungsi invers dari f, yaitu f^{-1}, sekarang dapat didefinisikan dengan $f^{-1} f$ = id S dan ff^{-1} = id T

Catatan. Apabila gf dapat dikerjakan maka pada umumnya fg tidak dapat dikerjakan menurut definisi pergandaan fungsi. Akan tetapi, walaupun dapat dikerjakan, misalnya jika f maupun g fungsi dari S ke S maka belum tentu gf = fg. Sebagai contoh kita ambil untuk S maupun T himpunan bilangan riel, dengan :

$f : x \longrightarrow x^2$ dan $g : x \longrightarrow x + 1$ di mana x bilangan riel, Maka

$gf : x \longrightarrow x^2 \longrightarrow x^2 + 1$, sedangkan dari lain pihak

$fg : x \longrightarrow x + 1 \longrightarrow (x + 1)^2$ sehingga $gf \neq fg$.

Untuk menentukan invers dari komposisi fungsi maka perhatikanlah contoh berikut.

Bila $f : x \longrightarrow \frac{x}{3}$ dengan $D(f) = \{ x \mid x \text{ bilangan riel} \}$

$g : x \longrightarrow x + 2$ dengan $D(g) = D(f)$

maka komposisi g f dapat diperoleh dengan cara demikian :

$$x \xrightarrow{f} \frac{x}{3} \xrightarrow{g} \frac{x}{3} + 2 \quad \text{sehingga}$$

$$x \xrightarrow{g\,f} \frac{x}{3} + 2$$

Jadi $g\,f : x \longrightarrow \frac{x}{3} + 2$ atau $(g\,f)x = \frac{x}{3} + 2$.

Sekarang akan ditentukan invers dari g f yaitu $(g\,f)^{-1}$

Sebagaimana pengertian invers suatu fungsi, maka kita dapat membuat skema sebagai berikut.

$x \xleftarrow{(g\,f)^{-1}} \frac{x}{3} + 2$ yang dapat diperoleh dari skema berikut.

$$x \xleftarrow{f^{-1}} \frac{x}{3} \xleftarrow{g^{-1}} \frac{x}{3} + 2$$

Demikian dapatlah dapatlah dituliskan $(g\,f) = f^{-1}\,g^{-1}$.

Perhatikan urutannya.

Untuk mendapatkan bentuk fungsi inversnya dapat kita buat skema berikut :

$$x \xrightarrow{g^{-1}} x - 2 \xrightarrow{f^{-1}} 3(x - 2)$$

Bukti formal untuk rumus $(g\ f)^{-1} = f^{-1}\ g^{-1}$ dapat dikerjakan dengan menggunakan definisi invers fungsi dan definisi dari komposisi fungsi.

Contoh 1. S himpunan bilangan-bilangan riel, sedangkan T himpunan bilangan-bilangan riel antara 0 dan 1. Dilakukan perkawanan dari $x \in S$ dengan $\frac{e^x}{1 + e^x} \in T$. Buktikan bahwa perkawanan itu fungsi bijektif dan tentukan inversnya.

Penyelesaian. Perkawanan itu merupakan suatu fungsi sebab untuk setiap x positif, negatif atau nol maka terdapat dengan tunggal $\frac{e^x}{1 + e^x}$ bilangan antara 0 dan 1.

Ambil sekarang $y \in T$, maka y ini berasal dari $x \in S$ yang tunggal, sebab $y = \frac{e^x}{1 + e^x}$ menghasilkan

$$y(1 + e^x) = e^x$$
$$e^x(1 - y) = y$$
$$e^x = \frac{y}{1 - y} \quad \text{sehingga} \quad \ln y = \frac{y}{1 - y}$$

Karena dihitung melalui satu persamaan yang sama maka aturan kedua adalah kebalikan dari aturan pertama. Sehingga perkawanannya merupakan fungsi bijektif. Kita perlihatkan hal ini secara eksplisit dengan menggunakan fungsi inversnya $y \longrightarrow \ln \frac{y}{1 - y}$ yang kita sebut g secara demikian :

$$x \xrightarrow{f} \frac{e^x}{1 + e^x} \xrightarrow{g} \ln \frac{\frac{e^e}{1 + e^x}}{1 - \frac{e^x}{1 + e^x}} = \ln e^x = x$$

Maka terbukti bahwa $g\ f =$ id S. Sebaliknya juga $f\ g =$ id T. Sehingga g adalah invers f.

Contoh 2. Tentukanlah invers dari $f : x \longrightarrow 3x + 2$

f dapat dipandang sebagai suatu komposisi dua fungsi.

$$x \xrightarrow{g} 3x \xrightarrow{h} 3x + 2 \quad \text{dan inversnya}$$

$$\frac{x - 2}{3} \xleftarrow{g^{-1}} x - 2 \xleftarrow{h^{-1}} x$$

Jadi $f^{-1}(x) = (h\ g)^{-1}(x) = g^{-1}\ h^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}$

atau $f^{-1} : x \longrightarrow \frac{x - 2}{3}$

Cara lain (tanpa diagram)

$f : x \longrightarrow 3x + 2$ dapat ditulis sebagai $y = f(x) = 3x + 2$. Selesaikan ke y, menjadi $x = \frac{y - 2}{3}$. Tukar x dengan y dan y dengan x, menjadi $y = \frac{x - 2}{3}$, sehingga diperoleh :

$f^{-1} : x \longrightarrow \frac{x - 2}{3}$

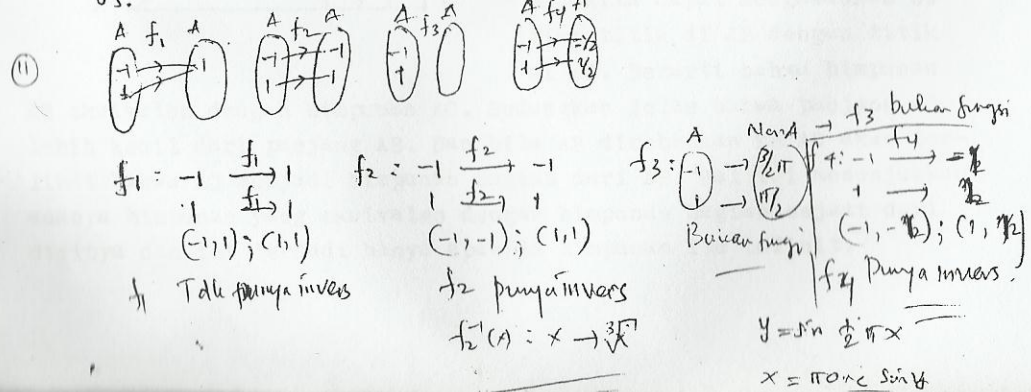
LATIHAN.

1. S dan T adalah himpunan bilangan riel. Apakah perkawanan $s \longrightarrow s^2 \in T$ merupakan fungsi ? Surjektif ? Injektif?
2. Tentukan daerah hasil(range) yaitu anggota-anggota T yamg mempunyai kawan di S pada soal 1.
3. Ditentukan S dan T himpunan bilangan-bilangan riel. Apakah fungsi dengan rumus $f : s \longrightarrow s^3$ surjektif ? Injektif ?
4. $S = \{x \mid 0 < x < \infty\}$ dan $T = \{x \mid 0 < x < 1\}$. Perkawanan x dengan $\frac{x}{1 + x}$ dari S ke T. Apakah perkawanan ini fungsi ? Jika fungsi apakah bijektif ? Apabila demikian tentukan fungsi inversnya.
5. Ditentukan himpunan-himpunan S dan T. Dibuat S x T dan T x S. Perkawanan $(s,t) \in S \times T$ dengan $(t, s) \in T \times S$. Buktikan bahwa perkawanan ini adalah fungsi bijektif.
6. Misalkan fungsi $f : R \longrightarrow R$ didefinisikan oleh
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{jika } x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{jika } -2 \leq x \leq 3 \\ 2x + 3 & \text{jika } x < -2 \end{cases}$$
Carilah f(2), f(4), f(-1) dan f(-3). Kemudian gambarkan grafik Kartesiusnya.
7. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 0\}$. Berapa bamyak fungsi yang dapat dibuat dari A ke B ?
8. Misalkan $a = \{1,2,3,4,5\}$ dan fungsi-fungsi $f : A \longrightarrow A$ dan $g : A \longrightarrow A$ didefinisikan oleh f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 3, f(4) = 1, f(5) = 2, g(1) = 4, g(2) = 1, g(3) = 1, g(4) = 2,

Carilah fungsi-fungsi komposisi f g dan g f.

9. Misalkan fungsi-fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$. Carilah rumus-rumus yang mendefinisikan g f dan f g.

10. Diketahui fungsi-fungsi f dan g pada bilangan-bilangan riel R yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = 3x - 4$. Carilah rumus-rumus yang mendefinisikan g f dan f g. Kemudian periksalah rumus-rumus itu untuk membenarkan bahwa $(g\ f)(2) = g(f(2))$ dan $(f\ g)(2) = f(g(2))$.

11. Ambil $A = \{-1, 1\}$. Misalkan fungsi f_1, f_2, f_3, f_4 dari A ke dalam A didefinisikan oleh :
$f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^5$, $f_3(x) = \sin^{-1} x$, $f_4(x) = \sin \frac{1}{2}\pi x$.
Nyatakan apakah fungsi-fungsi ini memiliki invers atau tidak.

V. KE-TAK-HINGGAAN

1. DEFINISI KE-TAK-HINGGAAN

Kita telah mengetahui bahwa dua himpunan S dan T disebut ekuivalen bhb dapat ditemukan suatu pemetaan bijektif antara kedua himpunan itu. Sekarang dikemukakan dua definisi dari himpunan tak berhingga. Yang pertama mendefinisikan lebih dahulu himpunan berhingga, dengan ingkarannya himpunan tak berhingga. Sedangkan yang kedua sebaliknya yaitu dimulai dengan suatu definisi dari himpunan tak berhingga, dengan ingkarannya himpunan berhingga.

DEFINISI 1. Suatu himpunan S disebut berhingga atau induktif bhb $S = \emptyset$ atau ekuivalen dengan suatu mulaan dari himpunan bilangan asli. Yaitu apabila ada bilangan asli n sedemikian sehingga S memuat n anggota. Apabila tidak demikian maka S disebut tidak berhingga atau non-induktif.

DEFINISI 2. Suatu himpunan S disebut tak berhingga atau refleksif bhb S ekuivalen dengan himpunan bagian sejati dari diri sendiri. Apabila tidak demikian maka S berhingga atau non-refleksif.

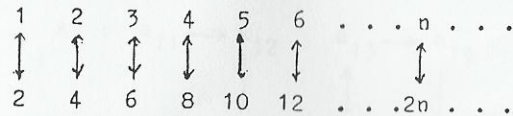
Dapat dibuktikan bahwa kedua definisi di atas adalah ekuivalen.

DEFINISI. Suatu himpunan yang ekuivalen dengan himpunan bilangan alam disebut himpunan yang denumerabel.

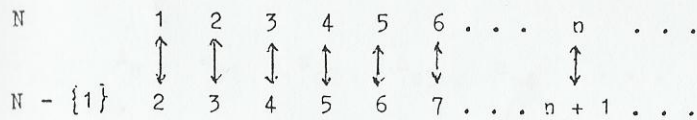
DEFINISI. Suatu himpunan yang berhingga atau denumerabel disebut himpunan countable . Himpunan countable sering juga disebut himpunan terbilang.

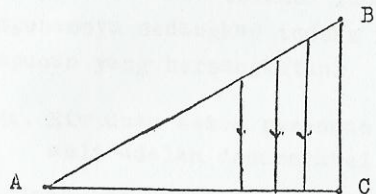
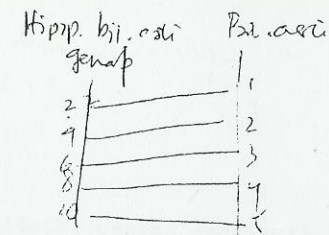
Perhatikanlah bahwa dua himpunan ekuivalen jika dan hanya jika dapat ditemukan suatu fungsi bijektif yang membentuk korespondensi 1 - 1 antara kedua himpunan itu.

Suatu pemetaan tertentu yang memperlihatkan denumerabilitas suatu himpunan disebut suatu enumerasi.

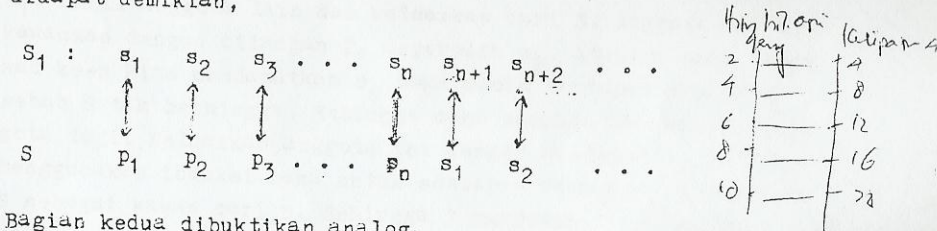
Contoh. Himpunan bilangan-bilangan asli positif adalah denumerabel. Suatu enumerasi yang menunjukkan denumerabilitas ini terlihat pada diagram berikut.

Contoh. Himpunan semua bilangan asli adalah himpunan tak hingga. Hal ini dapat diperlihatkan dengan menunjukkan bahwa himpunan bilangan asli ini ekuivalen dengan himpunan bagian sejati dari dirinya sendiri.

Ambillah himpunan bagian sejati dari himpunan bilangan asli N misalnya $N - \{1\}$. Adanya pemetaan bijektif antara kedua himpunan ini ditunjukkan pada diagram di bawah ini.

N	1	2	3	4	5	6 . . .	n . . .
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
$N - \{1\}$	2	3	4	5	6	7 . . .	n + 1 . . .

Contoh. Himpunan $D = \{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 6,\ x \text{ bilangan riel}\}$ adalah himpunan non-denumerabel, karena tak dapat ditunjukkan suatu pemetaan bijektif yang memetakan himpunan D ke himpunan bilangan asli.

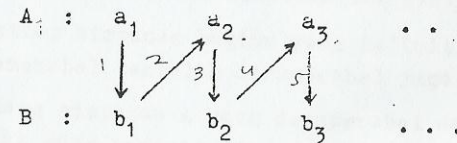
Contoh.

Segitiga ABC adalah siku-siku di C. Segmen AB merupakan himpunan titik-titik; demikian juga segmen AC. Dengan menggunakan garis-garis sejajar dengan BC, kita dapat mengawankan setiap titik di AB dengan titik di AC. Berarti bahwa himpunan AB ekuivalen dengan himpunan AC. Sedangkan jelas bahwa panjang AB lebih kecil dari panjang AB. Dan bila AB direbahkan ke AC akan terlihat bahwa AC menjadi himpunan bagian dari AB. Hal ini menunjukkan adanya himpunan yang ekuivalen dengan himpunan bagian sejati dari dirinya dan ini terjadi hanya apabila himpunan itu infinit.

TEOREMA. Apabila kepada suatu himpunan yang denumerabel ditambahkan anggota yang berhingga banyaknya maka hasilnya tetap denumerabel. Apabila dari padanya dikeluarkan anggota-anggota yang banyaknya berhingga banyaknya maka sisanya tetap denumerabel.

Bukti. Perhatikan bahwa dimungkinkannya himpunan indeks $I = \{1,2,3,\ldots\}$ untuk anggota-anggotanya suatu himpunan memperlihatkan bahwa himpunan ini denumerabel. Jadi $S = \{s_1, s_2, s_3 \ldots\}$. Misalkan pada S ditambahkan $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$. Maka $S = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, s_1, s_2, \ldots\}$. Suatu enumerasi didapat demikian,

S_1 :	s_1	s_2	s_3 . . .	s_n	s_{n+1}	s_{n+2}	. . .
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
S	p_1	p_2	p_3 . . .	p_n	s_1	s_2	. . .

Bagian kedua dibuktikan analog.

TEOREMA. Union dari dua himpunan A dan B yang kedua-duanya denumerabel adalah denumerabel lagi.

Bukti.

$$\begin{array}{lllll} A : & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ B : & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \end{array}$$

Suatu enumerasi $A \cup B$: $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \ldots$ yang didapat dengan mengikuti jalan arah panah.

TEOREMA. Union dari keluarga himpunan dengan anggota yang denumerabel banyaknya, sedangkan setiap anggotapun denumerabel adalah denumerabel.

Bukti. Perhatikan diagram berikut.

denumerabel →

d e n u m m e r a b e l ↓

$A_1 : a_{11} \rightarrow a_{12} \quad a_{13} \rightarrow a_{14} \quad \ldots$

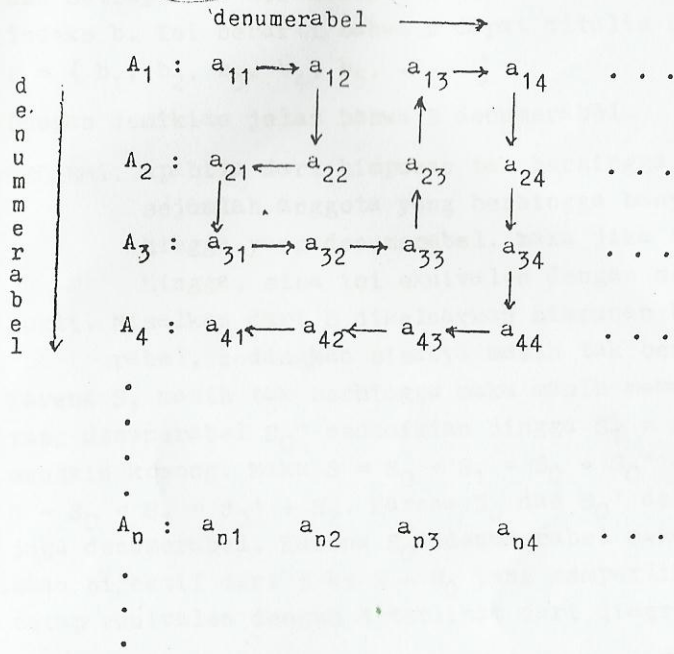
$A_2 : a_{21} \leftarrow a_{22} \quad a_{23} \quad a_{24}$

$A_3 : a_{31} \rightarrow a_{32} \rightarrow a_{33} \quad a_{34} \quad \ldots$

$A_4 : a_{41} \leftarrow a_{42} \leftarrow a_{43} \leftarrow a_{44} \quad \ldots$

$\vdots$

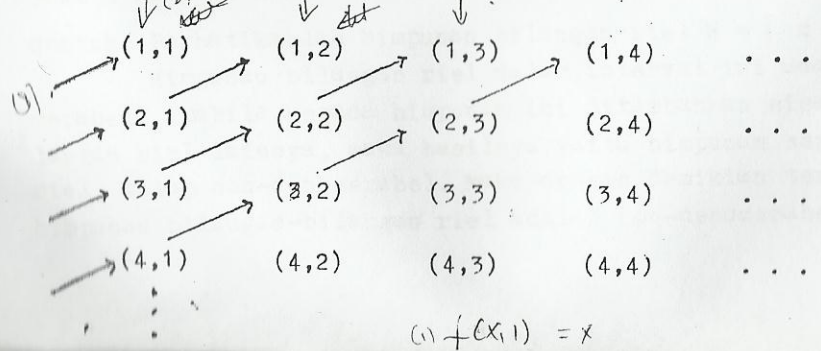
$A_n : a_{n1} \quad a_{n2} \quad a_{n3} \quad a_{n4} \quad \ldots$

$\vdots$

Suatu enumerasi dari $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ umpamanya

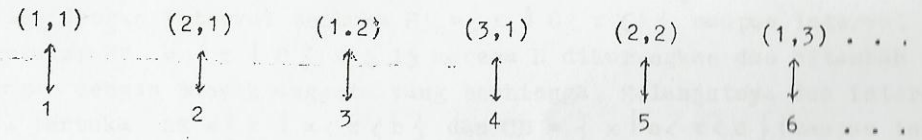
$a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, a_{31} \ldots$

Perhatikan bahwa anggota-anggota setiap himpunan kita sajikan dengan menggunakan dua indeks. Indeks pertama sama dengan indeks dari himpunannya sedangkan indeks kedua memperlihatkan enumerasi dari himpunan yang bersangkutan.

TEOREMA. Himpunan semua pasangan berurutan dari bilangan-bilangan asli adalah denumerabel.

Bukti. Pasangan-pasangan itu kita urutkan (disusun) sebagai berikut

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	...
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	...
⋮				

Suatu enumerasi didapat dengan mengikuti jalannya arah anak-anak panah, demikian :

(1,1)	(2,1)	(1,2)	(3,1)	(2,2)	(1,3)	. . .
↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	2	3	4	5	6	. . .

TEOREMA, Suatu himpunan S yang non-induktif, yaitu tak berhingga pasti memuat himpunan bagian yang denumerabel.

Bukti. Ambil anggota sembarang dari S. Anggota ini dikeluarkan dan dikawankan dengan bilangan 1. Anggota tersebut diberi nama s_1. Ambil anggota lain dan keluarkan dari S. Anggota ini dikawankan dengan bilangan 2, deperoleh s_2. Apabila pada langkah ke-n kita mendapatkan s_n maka masih terdapat sisa oleh sebab S tak berhingga. Sehingga maka mungkinlah memilih anggota lagi. Keluarkan anggota ini dengan mendapat s_{n+1}. Dengan menggunakan induksi maka untuk setiap n didapat anggota dari S sebagai kawan dari n. Sehingga S mempunyai $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ yaitu suatu himpunan denumerabel sebagai himpunan bagian.

Catatan. Pada bukti di atas telah digunakan suatu prinsip logika atau aksioma dari teori himpunan yang disebut axiom of choice, yaitu adanya kemungkinan memilih dengan bebas anggota-anggota dari suatu himpunan sebanyak tak hingga kali.

TEOREMA. Setiap himpunan bagian yang infinit dari himpunan yang denumerabel tentulah denumerabel juga.

Bukti. Pandang himpunan A yang denumerabel dan B himpunan bagian dari A yang infinit. Karena A denumerabel maka dapat ditulis

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\}$

Sekarang secara berurutan mulai dari a_1 kita bergerak ke kanan untuk mendapatkan elemen A yang menjadi elemen dari B. Misalnya kita dapatkan a_4 sebagai elemen dari B. Elemem tersebut kita beri tanda baru yaitu b_1. Demikian, kita teruskan bergerak ke kanan tentu kita jumpai lagi elemen A yang juga anggota B, misalnya a_7. Ini kita beri tanda baru b_2. Demikian kita lakukan terus ke kanan. Oleh karena B

dan setiap kali menemukan itu kita beri tanda baru sesuai dengan indeks b. Ini berarti bahwa B dapat ditulis sebagai :

$B = \{ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots \}$

Dengan demikian jelas bahwa B denumerabel.

TEOREMA. Apabila dari himpunan tak berhingga S dikeluarkan darinya sejumlah anggota yang berhingga banyaknya, atau tak berhingga yang denumerabel, maka jika sisanya masih tak berhingga, sisa ini ekuivalen dengan semula S.

Bukti. Misalkan dari S dikeluarkan himpunan bagian S_0 yang denumerabel, sedangkan sisanya masih tak berhingga : $S - S_0 = S_1$. Karena S_1 masih tak berhingga maka masih memuat himpunan bagian yang denumerabel S_0' sedemikian hingga $S_1 = S_0' + S_2$ dengan S_2 mungkin kosong. Maka $S = S_0 + S_1 = S_0 + S_0' + S_2$. Sedangkan $S - S_0 = S_1 = S_0' + S_2$. Karena S_0 dan S_0' denumerabel maka $S_0 + S_0'$ juga denumerabel. Karena S_0' denumerabel maka $S_0' \sim S_0 + S_0'$. Pemetaan bijektif dari S ke $S - S_0$ yang memperlihatkan bahwa $S - S_0$ tetap ekuivalen dengan S terlihat dari diagram di bawah ini.

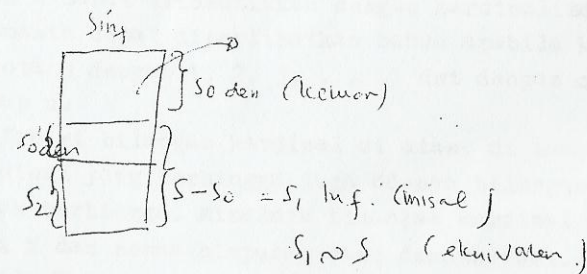
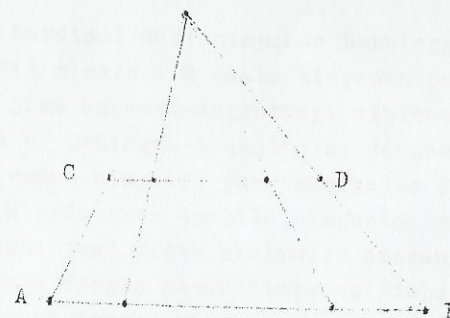
$$\begin{array}{ccccc} S & = & S_0 + S_0' & + & S_2 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ S - S_0' & = & S_0 & + & S_2 \end{array}$$

Akibat. Apabila kepada suatu himpunan tak berhingga S ditambahkan anggota yang berhingga banyaknya ataupun tak berhingga yang denumerabel dengan hasil S', maka $S' \sim S$. Sebab apabila dari S' dikeluarkan lagi anggota-anggota yang dimasukkan tadi, sehingga menjadi S kembali maka menurut teorema di atas $S' \sim S$.

Contoh. Perhatikanlah himpunan bilangan riel $H = \{ x \mid 0 < x \leq 1 \}$.

Himpunan bilangan riel dalam interval ini adalah non-denumerabel. Apabila kepada himpunan ini ditambahkan sisa bilangan-bilangan riel lainnya, maka hasilnya yaitu himpunan semua bilangan riel, tetap non-denumerabel. Maka dengan demikian terlihat bahwa himpunan bilangan-bilangan riel adalah non-denumerabel. Di bawah

ini akan dibuktikan bahwa himpunan bilangan-bilangan riel R ekuivalen dengan himpunan $H = \{ x \mid 0 < x \leq 1 \}$ tersebut di atas.

Terlebih dahulu perhatikan bahwa $H = \{ x \mid 0 < x \leq 1 \}$ adalah ekuivalen dengan interval terbuka $H' = \{ x \mid 0 < x < 1 \}$ maupun interval tertutup $H'' = \{ x \mid 0 \leq x \leq 1 \}$ karena H dikurangkan dan ditambah dengan dengan banyak anggota yang berhingga. Selanjutnya dua interval terbuka $AB = \{ x \mid a < x < b \}$ dan $CD = \{ x \mid c < x < d \}$ (maupun interval tertutupnya adalah ekuivalen. Bukti geometris didasarkan atas fakta bahwa dua garis berpotongan menentukan tepat satu titik potong saja. Perhatikanlah diagram di bawah ini.

2. KARDINALITAS HIMPUNAN

Perhatikanlah himpunan-himpunan berikut ini :

$A = \{$ Harimau, Bebek, Kucing $\}$

$B = \{$ Tono , Bono , Dono $\}$

$C = \{$ Medan , Solo , Padang $\}$

Ada korespondensi (pemasangan, perkawanan) 1 - 1 antara para anggota. (Korespondensi sebenarnya lebih mendasar dari konsep bilangan. Perhatikanlah cara membilang di Afrika pada jaman kuno. Jika ada tamu maka tiap tamu disodorkan kelapa, demikian seterusnya ; jadi ada korespondensi 1 - 1. Mereka sendiri tidak tahu membilang) Untuk memeriksa sifat berserikat antara A, B dan C, maka dilakukan abstraksi, yaitu mengesampingkan (meniadakan) semua sifat khas para anggota (meniadakan special nature).

Abstraksi ini, yang merupakan perbuatan mental dilakukan demikian

1. Kita kesampingkan (tidak diperhatikan - ignore) special nature (sifat hakiki) dari anggota-anggotanya.
2. Kita kesampingkan juga urutan (jika ada) di antara para anggota himpunan A, B, dan C.

Setelah kedua abstraksi ini dilakukan, justru masih ada sifat berserikat pada himpunan-himpunan di atas. A, B, C dan semua himpunan untuk mana dapat diadakan korespondensi 1 - 1 mempunyai sifat berserikat. Dapatnya korespondensi 1 - 1 dibuat antara para anggota himpunan-himpunan itulah satu-satunya sifat berserikat dimaksud.

A berada dalam relasi korespondensi 1 - 1 dengan B diucapkan dengan singkat

"A ekuivalen dengan B". Notasi : $A \sim B$

Relasi "berada dalam korespondensi 1 - 1" adalah relasi ekuivalen.

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \implies B \sim A$
3. $A \sim B$ & $B \sim C \implies A \sim C$

DEFINISI. Dua himpunan disebut mempunyai bilangan kardinal atau kardinalitas yang sama bhb mereka ekuivalen.

Notasi untuk bilangan kardinal himpunan S adalah $\overline{\overline{S}}$ atau $|S|$. Notasi pertama mengingatkan kita bahwa untuk mendapatkan bilangan kardinal dari S maka kita mengadakan dua kali abstraksi yaitu kita lepaskan "special nature" (hakiki khas) dari elemen-elemennya dan kemudian juga urutannya. Perhatikanlah tiga himpunan yang telah dikemukakan terdahulu.

Sehingga dapat juga dikatakan bahwa kardinalitas suatu himpunan S adalah totalitas dari sifat-sifat yang dimiliki oleh S berserikat dengan semua himpunan dan hanya dengan himpunan yang ekuivalen dengannya.

Bilangan kardinal dari himpunan berhingga tidak lain dari bilangan alam. Ambil misalnya S suatu himpunan berhingga. Karena S berhingga maka jika anggota-anggotanya dihitung akan berakhir pada suatu bilangan n. Sehingga S ekuivalen dengan H = 1, 2, 3, ... Selanjutnya semua himpunan yang ekuivalen dengan S akan ekuivalen pula dengan H sedangkan apabila himpunan itu tidak ekuivalen dengan S maka ia pasti juga tidak ekuivalen dengan H. Sehingga bilangan n dapat dikaitkan dengan semua himpunan himpunan yang ekuivalen dengan S dan hanya dengan himpunan-himpunan yang ekuivalen dengan S. Maka bilangan n dapat diidentikkan dengan kardinalitas dari S. Akan tetapi masih dapat diperlihatkan bahwa apabila kita kawankan anggota-anggota S dengan 1, 2, 3, . . . dst dengan cara lain maka hasilnya tetap n.

Dengan definisi bilangan kardinal di atas, di samping bilangan-bilangan kardinal yang berhingga juga adanya bilangan-bilangan kardinal yang tak berhingga. Misalnya bilangan kardinal dari himpunan **bilangan asli** N dan semua himpunan yang denumerabel. Bilangan kardinal ini yaitu $\overline{\overline{N}}$ biasanya disajikan dengan simbol tertentu $\aleph_0$ dan dibaca aleph nol (Aleph nol adalah huruf pertama dalam abjad Yahudi). Bilangan kardinal dari himpunan bilangan riel, dan semua himpunan yang ekuivalen dengannya disajikan dengan $\bar{C}$. Karena melampaui keberhinggaan maka bilangan kardinal dari himpunan tak berhingga disebut suatu bilangan transfinit.

LATIHAN

1. Tinjaulah lingkaran-lingkaran konsentris

   $C_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = a^2\}$, $C_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = b^2\}$

   di mana $0 < a < b$. Dapatkanlah secara geometris korespondensi satu-satu di antara C_1 dan C_2.

2. Buktikan :

   a. $[0,1] \sim (0,1)$ b. $[0,1] \sim [0,1)$ c. $[0,1] \sim (0,1]$.

   (Buatlah suatu enumerasi yang menunjukkan adanya fungsi bijektif yang memetakan himpunan yang satu ke himpunan yang lain)

3. Buktikanlah bahwa himpunan P denumerabel jika P adalah himpunan dari semua polinomial $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x + a_3x^3 + \ldots + a_mx^m$ dengan koefisien-koefisien bulat, yaitu $a_0, a_1, \ldots, a_m$ adalah bilangan bulat.

4. Sebuah bilangan r dinamakan bilangan aljabar jika r adalah pemecahan persamaan polinomial

   $$p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$$

   dengan koefisien-koefisien yang bulat.

   Buktikanlah bahwa himpunan A dari bilangan aljabar adalah himpunan denumerabel.

5. Bilangan-bilangan bulat, Z, dapat dibuat dalam korespondensi satu satu dengan N, yakni bilangan asli, sebagai berikut :

   $$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \ldots \end{array}$$

   Carilah sebuah rumus yang mendefinisikan sebuah fungsi $f : N \rightarrow Z$ yang memberikan korespondensi di atas antara N dan Z.

6. Buktikan bahwa jika A dan B denumerabel maka A x B denumerabel.

VIII. HIMPUNAN TERURUT PARSIAL DAN HIMPUNAN TERURUT TOTAL

1. HIMPUNAN TERURUT PARSIAL (PARTIALLY ORDERED SET ATAU POSET)

Suatu urutan parsial (partial order) dalam sebuah himpunan S adalah sebuah relasi R pada S yang memenuhi sifat-sifat

1) refleksif, yakni $\forall a \in S.\ aRa$.
2) anti-simetri, yakni $\forall a,b \in S.\ aRb \wedge bRa \Longrightarrow a = b$.
3) transitif, yakni $\forall a,b,c \in S.\ aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc$.

Apabila relasi R pada S mendefinisikan suatu urutan parsial maka relasi ini sering disimbolkan dengan "$\precsim$", tetapi jika tidak menimbulkan kesalahpahaman seringkali digunakan simbol "$\leqslant$".

Dengan demikian ketiga sifat yang dimiliki oleh relasi urutan parsial R itu dapat ditulis demikian :

1) $\forall a \in S.\ a \leqslant a$
2) $\forall a,b \in S.\ a \leqslant b \wedge b \leqslant a \Longrightarrow a = b$
3) $\forall a,b,c \in S.\ a \leqslant b \wedge b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$.

Perhatikan bahwa tanda "$\leqslant$" _tidak_ dibaca sebagai "lebih kecil atau sama dengan" walaupun tanda ini dapat berlaku untuk sifat yang kita kenal selama ini pada bilangan riel.

Ada beberapa cara membaca notasi ralasi urutan parsial ini:

$a \leqslant b$ dibaca
- a mendahului b atau b mengikuti a
- a merendahi b atau b mengatasi a
- a termuat dalam b atau b memuat a
- a lebih kecil atau sama dengan b
- b lebih besar atau sama dengan a
- b mendominasi a

Notasi ini dapat pula dibalik, jadi $b \geqslant a$ berarti $a \leqslant b$.

Notasi "$\leqslant$" sering juga digunakan dengan arti

$a < b$ dibaca : a murni mendahului b atau b murni mengikuti a

a murni merendahi b atau b murni mengatasi a

a murni termuat dalam b atau b murni memuat a

a lebih kecil dari b atau b lebih besar dari a

Himpunan S beserta relasi urutan parsial R disebut himpunan terurut parsial (S, R) atau (S, $\leqslant$) dan sering disingkat menjadi POSET (partially ordered set).

Apabila terdapat dua buah anggota S yang dapat dihubungkan dengan relasi urutan parsial R, dikatakan bahwa kedua anggota itu dapat dibandingkan. Jadi dua anggota a dan b dalam S yang dapat dibandingkan oleh relasi R ditulis aRb atau bRa. Dengan memperhatikan adanya sifat refleksif, anti-simetri (yang menggunakan kata perangkai "jika . . . maka") serta transitif (yang juga menggunakan kata gandeng "jika . . . maka")., maka jelas pula bahwa dalam suatu poset dimungkinkan adanya dua elemen dari S yang tidak dapat dibandingkan.

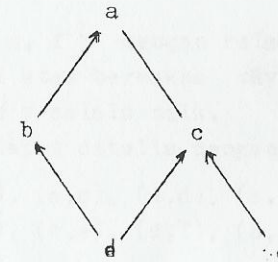
Beberapa contoh :

1) Relasi R yang didefinisikan oleh "himpunan bagian dari" pada keluarga himpunan merupakan relasi urutan parsial.

   Hal ini benar karena dalam keluarga himpunan berlaku $A \subset A$ (refleksif), jika $A \subset B$ dan $B \subset A$ maka $A = B$ (anti-simetri), $A \subset B$ dan $B \subset C$ berakibat $A \subset C$ (transitif).

2) Andaikan A adalah sebarang himpunan bagian dari bilangan-bilangan riel. Relasi dalam A yang didefinisikan oleh "$x \leqslant y$" merupakan suatu relasi urutan parsial. Hubungan tersebut dinamakan hubungan terurut alami dalam A. Demikianlah, (A, $\leqslant$) merupakan suatu POSET.

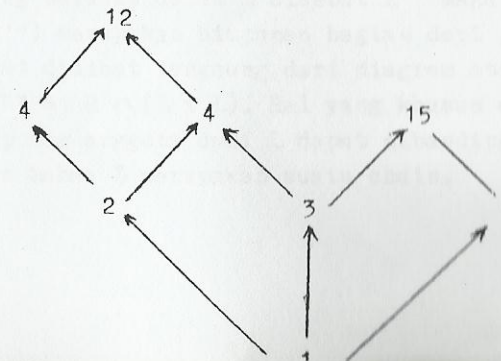
3) Misalkan R adalah relasi dalam himpunan bilangan asli N yang didefinisikan oleh "x adalah sebuah kelipatan y" adalah relasi terurut parsial. Periksalah.

4) Misalkan $S = \{a, b, c, d, e\}$. Diagram ini mendefinisikan sebuah urutan parsial dalam S dengan cara berikut :

$x \leqslant y$ jika $x = y$ atau jika kita dapat pergi dari x ke y dalam diagram tersebut, yang selalu bergerak dalam arah yang ditunjukkan, yakni ke atas. Perhatikanlah bahwa $b \leqslant a$, $d \leqslant a$ dan $e \leqslant c$, dan seterusnya.

5) Himpunan $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15\}$ beserta relasi R yang berarti "pembagi dari" membentuk suatu poset.

   Bila aRb yang berarti a pembagi dari b ditulis dengan $a | b$, maka untuk anggota-anggota dari P dapat ditulis $1 | 2$, $1 | 3$, $1 | 4$, $1 | 5$, $1 | 6$, $1 | 12$, $1 | 15$, $2 | 4$, $2 | 6$, $2 | 12$, $3 | 6$, $3 | 12$, $3 | 15$, $4 | 12$, $5 | 15$, $6 | 12$, dan tentu juga $1 | 1$, $2 | 2$ $3 | 3$, $4 | 4$, $5 | 5$, $6 | 6$, $12 | 12$, $15 | 15$.

   Tampak bahwa ketiga sifat, yakni refleksif, anti-simetri dan transitif terpenuhi.

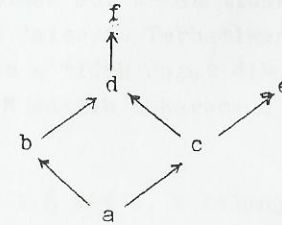
   Poset ini dapat digambarkan dengan diagram berikut :

Perhatikanlah terpenuhinya sifat-sifat relasi terurut parsial dalam poset ini.
Sifat refleksif, $1|1$, $2|2$, $3|3$, dan seterusnya.
Sifat anti-simetri, $a|b$ dan $b|a$ hanya mungkin jika $a = b$.
Sifat transitif, $2|6$ dan $6|12$ berakibat $2|12$, $3|6$ dan $6|12$ berakibat $3|12$ dan sebagainya.

Di sini $2|12$ namun dalam diagram tidak terlihat adanya garis hubung langsung dari 2 ke 12, tetapi ditunjukkan dengan garis hubung naik dari 2 ke 4 terus ke 12 atau dari 2 ke 6 terus ke 12. Hal ini menunjukkan sifat transitif dari relasi itu.
Perhatikan pula bahwa tidak semua anggota dapat dibandingkan misalnya 2 dan 3 tidak dapat dibandingkan karena 2 bukanlah pembagi dari 3.

2. HIMPUNAN TERURUT TOTAL

Istilah "parsial" digunakan untuk mendefinisikan sebuah urutan yang tidak perlu untuk setiap elemen dari himpunan yang ditinjau. Apabila suatu himpunan S yang di dalamnya berlaku urut-an parsial R, jadi suatu poset (S, R), yang setiap dua anggota dapat dibandingkan maka disebut suatu himpunan terurut total (totally ordered set atau chain).
Himpunan bilangan asli dengan relasi $\leqslant$ adalah suatu contoh dari sebuah chain. Demikian juga himpunan bilangan riel dengan relasi yang sama. Perhatikanlah bahwa setiap dua bilangan asli atau setiap dua bilangan riel selalu dapat dibandingkan.
Sedangkan himpunan $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dengan relasi R yang didefinisikan oleh "x kelipatan y" merupakan himpunan terurut parsial tetapi tidak terurut total karena 1, 2, 3, 4, 5 merupakan kelipatan 1 tetapi 3 bukan kelipatan 2.

3. HIMPUNAN BAGIAN DARI HIMPUNAN TERURUT

Perhatikanlah suatu relasi urutan parsial R dalam himpunan H, jadi (H, R) suatu poset. Selanjutnya kita perhatikan himpunan K yang merupakan himpunan bagian dari H. Apabila relasi urutan R dalam H mengakibatkan relasi urutan R' di dalam K, maka (K, R') disebut himpunan bagian dari (H, R).

$H = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan relasi R yang terdefinisi menurut diagram di atas bermakna xRy bila x = y atau bila bergerak dari x ke y selalu naik.
Relasi R dalam H dapat ditulis dengan pasangan terurut :

$R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f), (b,d), (b,f), (c,d), (c,f), (c,e), (d,f), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f)\}$.

Sekarang perhatikan himpunan bagian $K = \{c, d, e, f\}$. Apabila relasi R yang berlaku dalam K dinyatakan dengan R' maka dapat dituliskan :

$R' = \{(c,d), (c,e), (d,f), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f), (c,f)\}$

$K \times K = \{(c,c), (c,d), (c,e), (c,f), (d,d), (d,c), (d,e), (d,f) (e,c), (e,d), (e,e), (e,f), (f,c), (f,d), (f,e), (f,f)\}$

Terlihat bahwa $R' = R \cap (K \times K)$. Dengan demikian dapatlah dikatakan bahwa :

(K, R') merupakan himpunan bagian dari poset (H, R) bila

(1) K himpunan bagian dari H dan

(2) $R' = R \cap (K \times K)$

Apabila misalnya dalam himpunan H tersebut di atas diambil himpunan bagian yang lain, misalnya $L = \{a, b, d, f\}$ sedang relasi R itu yang berlaku dalam L disebut R'' maka terlihat lagi bahwa (L, R'') merupakan himpunan bagian dari poset (H, R).
Hal ini dapat dilihat langsung dari diagram ataupun dengan memperhatikan $R'' = R \cap (L \times L)$. Hal yang khusus dari R'' adalah bahwa setiap dua anggota dari L dapat dibandingkan, Dengan demikian jelas bahwa L merupakan suatu chain.

Akibat : Bila himpunan H suatu chain maka setiap himpunan bagian dari H juga merupakan chain.

4. ELEMEN AWAL DAN ELEMEN AKHIR (FIRST AND LAST ELEMENT)

Ambillah suatu poset $(A, \leqslant)$. Dalam himpunan A tersebut mungkin terdapat elemen yang mempunyai kedudukan khusus yang disebut elemen awal atau elemen akhir. Pengertian ini kita definisikan sebagai berikut :

1) Elemen a dari A disebut elemen awal (elemen pertama) dari A bhb a mendahului semua elemen A.

   Secara simbolik dapat ditulis :

   a disebut elemen awal dari A <u>bhb</u> $a \in A$ dan $\forall x \in A.\ a \leqslant x$.

2) Elemen b dari A disebut elemen akhir dari A bhb b mengikuti semua elemen dari A.

   Secara simbolik dapat ditulis :

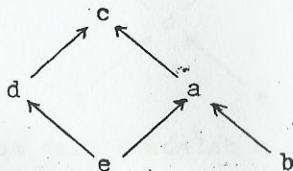
   b disebut elemen akhir dari A <u>bhb</u> $b \in A$ dan $\forall x \in A.\ x \leqslant b$.

Seringkali untuk elemen awal dan elemen akhir lebih mudah diingat bila digunakan istilah merendahi sebagai pengganti mendahului dan istilah mengatasi sebagai pengganti mengikuti.

Beberapa contoh

1) Tentukan elemen awal dan elemen akhir dari himpunan bilangan asli dengan urutan alamiah.

   Elemen awal dari A adalah 1 sedangkan elemen akhirnya tidak ada.

2) $M = \{a, b, c, d, e\}$ adalah himpunan terurut seperti ditunjukkan dalam diagram. Tentukanlah elemen awal dan elemen akhir.

Elemen awal dari M tidak ada sebab tidak ada elemen M yang mendahului semua elemen lainnya. Perhatikanlah bahwa b tidak mendahului e, jadi b dan e tidak dapat dibandingkan.

Elemen akhir dari M adalah c karena c mengikuti (mengatasi) semua elemen M.

3) Himpunan $S = \{x \mid 1 \leqslant x < 4,\ x \text{ bilangan riel}\}$ dengan relasi urutan biasa $\leqslant$, merupakan poset $(S, \leqslant)$. Dalam poset ini ada elemen awal yaitu 1, karena 1 anggota S dan 1 lebih kecil dari setiap anggota S yang lain. Tetapi S tidak memiliki elemen akhir karena tidak ada anggota S yang lebih besar dari setiap anggota yang lain.

4) Diketahui A adalah himpunan sebarang. 2^A adalah himpunan kuasa dari A yang merupakan keluarga himpunan. R adalah relasi yang didefinisikan sebagai "x subset dari y".

   Akan diselidiki apakah 2^A merupakan himpunan terurut dan apakah mempunyai elemen awal dan elemen akhir.

   $(2^A, R)$ merupakan poset tetapi bukan chain.

   $(2^A$ mempunyai elemen awal yaitu himpunan kosong sedang elemen akhirnya adalah A sendiri.

Akan kita tunjukkan selanjutnya bahwa suatu poset, apabila memiliki elemen awal, maka elemen awal itu tunggal.

Perhatikanlah poset $(A, \leqslant)$. Andaikan ada dua elemen awal yaitu a dan a'. Menurut pengertian elemen awal, maka $a \in A$, dan $a \leqslant x$ untuk setiap x anggota A. Karena a' elemen awal juga berarti $a' \in A$. Jadi haruslah $a \leqslant a'$.
Tetapi a' sendiri elemen awal berarti $a' \leqslant x$ untuk setiap $x \in A$. Karena a elemen awal berarti $a \in A$, jadi haruslah $a' \leqslant a$. Dengan demikian terdapat $a \leqslant a'$ dan $a' \leqslant a$ sehingga haruslah $a = a'$. Ini berarti pengandaian adanya dua elemen awal tidaklah benar. Dengan kata lain hanya ada satu elemen awal.

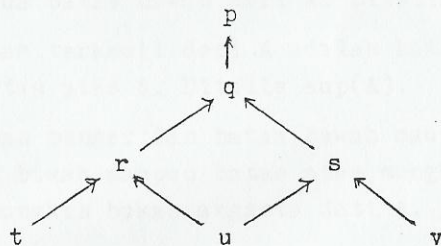
Dengan cara yang sama dapat pula ditunjukkan bahwa suatu poset apabila mempunyai elemen akhir, maka elemen akhir itu adalah unik.

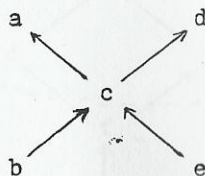
5. ELEMEN MAKSIMUM DAN ELEMEN MINIMUM

Kita perhatikan kembali poset $(A, \leqslant)$ maka didefinisikanlah :

1) Elemen m dari A disebut elemem maksimum dari A bila tidak ada elemen A yang murni mengatasi m.
   Dapat juga ditulis :
   $m \in A$ disebut elemen maksimum <u>bhb</u> $E\ x \in A.\ m < x$.
2) Elemen n dari A disebut elemen minimum dari A bila tidak ada elemen A yang murni merendahi n.
   Dapat juga ditulis :
   $n \in A$ disebut elemen minimum <u>bhb</u> $E\ x \in A.\ x < n$.

Contoh

1) Suatu poset digambarkan dengan diagram di bawah ini.

Dalam poset ini, p merupakan elemen maksimum sekaligus elemen akhir. Sedangkan t, u, dan v merupakan elemen minimum. Poset ini tidak memiliki elemen awal.

2) Diagram di bawah ini adalah urutan parsial dalam M = a, b, c, d, e .

Elemen maksimum dari M adalah a dan d sedang elemen minimumnya adalah b dan e.

3) $H = \{2, 3, 5, 9, 15\}$ dengan relasi R di H yang didefinisikan sebagai "pembagi dari" dan disimbolkan dengan $x \mid y$, yaitu x pembagi dari y.

(H, R) membentuk suatu poset dengan satu titik terasing yaitu 2, yang tidak dapat dibandingkan dengan elemen manapun dari H. Tidak ada satu elemenpun dari H yang murni merendahi 2, dan juga tidak ada satu elemenpun yang murni mengatasi 2. Jadi 2 merupakan elemen maksimum dan sekaligus elemen minimum. Elemen minimum yang lain adalah 3 dan 5. Sedangkan elemen maksimum adalah 9 dan 15. Tidak mempunyai elemen awal maupun elemen akhir.

Perlu diperhatikan hal-hal berikut :

1) Bila A suatu himpunan terurut total (chain), maka A paling banyak dapat memiliki sebuah elemen minimum. Demikian juga paling banyak dapat memiliki satu elemen maksimum.
2) Setiap poset yang finit paling sedikit memiliki sebuah elemen minimum dan paling sedikit sebuah elemen maksimum. Sedangkan himpunan terurut yang infinit belum tentu memiliki elemen minimum maupun elemen maksimum.

6. BATAS ATAS DAN BATAS BAWAH (UPPER AND LOWER BOUND)

Pada pembicaraan di atas telah diperkenalkan elemen awal, elemen akhir, elemen maksimum dan elemen minimum. Sekarang akan diperkenalkan pula batas atas dan batas bawah.
Perhatikanlah poset (S, R) dan (A, R'), himpunan bagian (poset bagian) dari (S, R).

1) Elemen $w \in S$ disebut batas bawah dari A bila w merendahi setiap elemen dari A.
2) Elemen $t \in S$ disebut elemen atas dari A bila t mengatasi setiap elemen dari A.

Bila relasi merendahi disimbolkan dengan $\leqslant$ maka pengertian di atas dapat ditulis :

1) Elemen w batas bawah A bhb $w \in S$ dan $\forall a \in A.\ w \leqslant a$.

2) Elemen t batas atas A bhb $t \in S$ dan $\forall a \in A.\ a \leqslant t$.

Dari pengertian tersebut terlihat bahwa suatu poset (A, R') mungkin tidak memiliki batas bawah, mungkin memiliki satu batas bawah tetapi mungkin juga memiliki banyak batas bawah. Demikian juga tentang batas atas. Karenanya dimungkinkan adanya batas bawah terbesar (bbt) atau greatest lower bound (glb) yang biasa disebut infimum (inf) dan batas atas terkecil (bat) atau least upper bound (lub) yang biasa disebut supremum (sup).

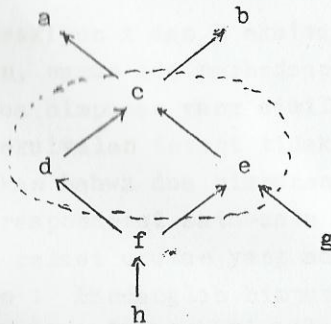
Untuk mengingat pengertiannya, penegasan berikut dapat dilakukan :

1) Batas bawah terbesar dari A adalah batas bawah yang mengatasi semua batas bawah dari A. Ditulis inf(A).

2) Batas atas terkecil dari A adalah batas atas yang merendahi semua batas atas A. Ditulis sup(A).

Memperhatikan pengertian batas bawah maupun batas atas, ternyata batas bawah maupun batas atas mungkin anggota dari A tetapi juga mungkin bukan anggota dati A.

Contoh

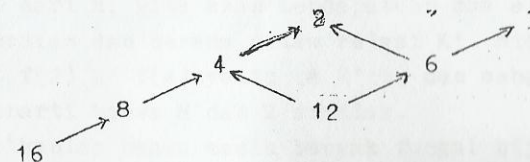
1) Ambil $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Poset (S, R) ditunjukkan pada diagram di bawah ini.

Kita perhatikan himpunan bagian $A = \{c, d, e\}$.

Dalam diagram tersebut, A juga merupakan himpunan terurut. Batas atas A adalah c, a dan b, karena ketiganya mengatasi semua anggota dari A. Sedangkan c adalah batas atas terkecil dari A, yang ditulis dengan sup(A) = c, karena c merendahi batas atas yang lain. Sedangkan f dan h merupakan batas bawah, karena keduanya merendahi semua anggota A. Sedangkan f merupakan batas bawah terbesar dari A, ditulis inf(A) = f, karena f mengatasi batas bawah yang lain.

Bagaimana halnya dengan g ? g bukanlah batas bawah sebab g tidak merendahi semua anggota A. Khususnya g tidak dapat dibandingkan dengan d.

2) Himpunan $H = \{x \mid 0 \leqslant x < 4,\ x \text{ bilangan riel}\}$ adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan riel . Bila dalam himpunan itu kita perhatikan relasi urutan biasa $\leqslant$, maka kita dapat mengatakan bahwa H mempunyai batas bawah yaitu anggota-anggota $B = \{x \mid x \leqslant 0\}$. Karenanya H mempunyai batas bawah terbesar yaitu inf(H) = 0 (batas bawah ini termasuk dalam H, yang lainnya tidak). Selanjutnya H mempunyai batas atas yaitu anggota-anggota $A = \{x \mid x \geqslant 4\}$, karena itu H mempunyai batas atas terkecil yaitu sup(H) = 4 (batas atas terkecil ini tidak termasuk dalam H).

Himpunan seperti H tersebut di atas, yaitu terbatas di atas dan terbatas di bawah disebut himpunan yang terbatas. Jadi setiap himpunan bilangan riel yang terbatas tentu mempunyai infimum dan supremum.

3) Himpunan $H = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ dengan relasi "kelipatan dari" yang disimbolkan dengan #. Jadi 4 # 2 berarti 4 kelipatan dari 2. Mudah diperiksa bahwa (H, #) merupakan suatu poset. Bila $S = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 16\}$, jelas H himpunan bagian dari S. Diagram poset (H, #) adalah :

Terlihat bahwa H tidak mempunyai batas atas maupun batas bawah karena tidak berlaku $8 \neq 12$ juga tidak $2 \neq 3$.

7. HIMPUNAN YANG SIMILAR

Perhatikanlah himpunan-himpunan berikut ini

$A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

$C = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$

Ketiga himpunan tersebut dua-dua adalah ekuivalen. Ini berarti bahwa ada fungsi $f : A \longrightarrow B$ bijektif (satu-satu dan onto), yaitu $f(x) = 2x$. Sedangkan untuk A dan C ada fungsi $g : A \rightarrow C$ yang bijektif yaitu $g(x) = -x$. Demikian juga dari B ke C. Sekarang perhatikan secara khusus masing-masing fungsi tersebut, dengan memperhatikan relasi urutan biasa .

Untuk $f(x) = 2x$. Bila $x, y \in A$ dan $x < y$ maka $f(x) < f(y)$ dan $f(x), f(y) \in B$.
Misalnya 1 dan 3 anggota A, maka $f(1) = 2$ dan $f(3) = 6$, keduanya anggota B, kecuali itu $1 < 3$ dan juga $2 < 6$.

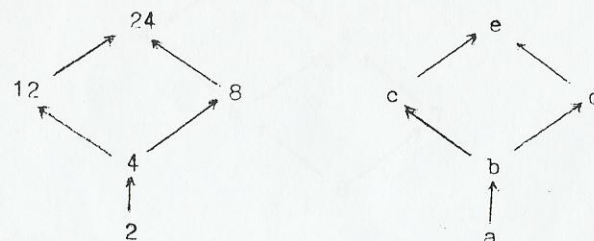
Untuk $g(x) = -x$. Bila $x, y \in A$ dan $x < y$ maka $g(x) > g(y)$ sedang $g(x), g(y) \in C$.
Misalnya 1 dan 3 anggota A, maka $g(1) = -1$ dan $g(3) = -3$, keduanya anggota C, kecuali itu $1 < 3$ tetapi $-1 > -3$.

Dengan demikian meskipun A dan B ekuivalen, demikian juga A dengan C ekuivalen, namun ada perbedaan sifat. Selanjutnya A dan B disebut dua himpunan yang similar (serupa). Sedangkan A dan C meskipun ekuivalen tetapi tidak similar.

Dapatlah dikatakan bahwa dua himpunan terurut disebut similar bila ada korespondensi satu-satu antara elemen-elemen yang sesuai dalam relasi urutan yang ada. Secara lebih baik dikatakan demikian : Pandanglah himpunan terurut A dan B. A similar dengan B (ditulis $A \simeq B$) bila dan hanya bila ada fungsi f dari A ke B yang bijektif serta memiliki sifat bahwa setiap $a, a' \in A$ berlaku $a < a'$ bhb $f(a) < f(a')$.

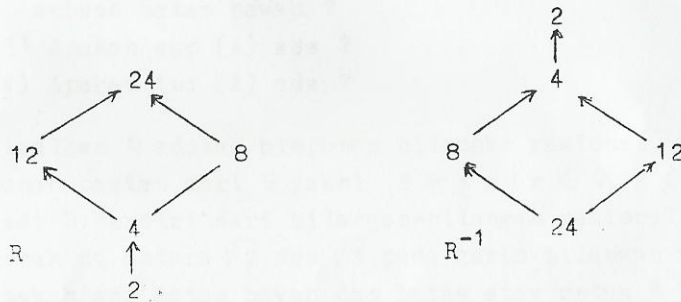
Selanjutnya pemetaan f sedemikian disebut pemetaan similar. Dari uraian di atas jelas bahwa dua himpunan similar tentulah ekuivalen, tetapi tidak sebaliknya,

Contoh

1) Perhatikan $H = \{2, 4, 8, 12, 24\}$ dengan relasi urutan "pembagi dari" yang disimbolkan dengan R. Himpunan $K = \{a, b, c, d, e\}$ dengan relasi yang ditunjukkan pada diagram di bawah ini, yang membentuk suatu poset. (H, R) juga membentuk poset. Kedua poset ini dapat digambarkan seperti di bawah ini.

Kedua himpunan H dan K tersebut jelas ekuivalen, dan banyak fungsi bijektif yang dapat dibuat dari H ke K. Andaikan relasi pada K disimbolkan dengan R', maka (K, R') menunjukkan suatu poset.

Sekarang kita pilih fungsi bijektif dari H ke K demikian $f : H \longrightarrow K$ memetakan 2 kepada a
4 kepada b
8 kepada c
12 kepada d
24 kepada e

Dengan demikian terlihat bahwa setiap kita mengambil dua elemen dari H, kita akan mendapatkan dua elemen dari K yang bersesuaian dan berada dalam relasi K'. Misalnya, 2R4 berakibat $f(2)\ R'\ f(4)$ yaitu $a\ R'\ b$, dan sebaliknya.
Ini berarti bahwa H dan K similar.
Perhatikanlah bahwa masih banyak fungsi bijektif dari H ke K tetapi tidaklah selalu menunjukkan sifat similar demikian.

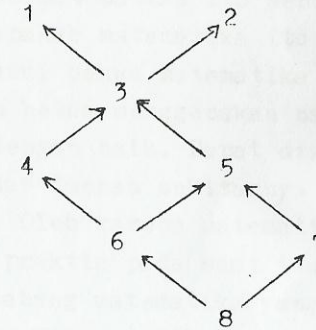
2) Perhatikan kembali poset (H, R) dalam contoh di atas dan suatu relasi lain R^{-1} yang berarti "kelipatan dari". Mudah dilihat bahwa (H, R^{-1}) juga merupakan poset. (R^{-1} disebut relasi urutan invers)
Kita buat diagram kedua poset tersebut.

Kita selalu dapat membuat fungsi bijektif dari H ke H, misalnya $f : x \longrightarrow x$ atau $f(x) = x$. Dengan fungsi itu kita dapat mengambil 2 R 4. Kemudian kita periksa f(2) = 2 dan f(4) = 4 yang keduanya di H dengan relasi R^{-1}. Apakah berlahu $2 R 4 \Longrightarrow 2 R^{-1} 4$? Jelas tidak. Lihatlah anak panah dari kedua diagram ini. Hal ini berarti f bukan suatu fungsi similar untuk H ke H, dengan relasi-relasi itu. Cobalah cari fungsi yang lain dari H ke H yang bijektif dan memenuhi sifat similar. Kiranya tidak akan ditemukan.

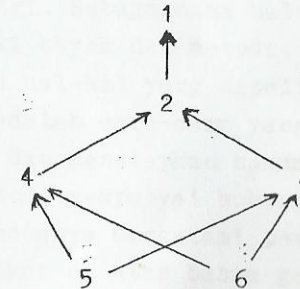
Dari uraian dan contoh-contoh di atas dapat dikemukakan beberapa hal penting di bawah ini.

1) Bila H himpunan terurut total (chain) dan H similar dengan K maka K juga merupakan himpunan terurut total. (dibuktikan dengan reductio ad absurdum : andaikan K tidak terurut total).

2) Bila himpunan A dan B similar, $f : A \longrightarrow B$ pemetaan similar maka a merupakan elemen awal A bhb f(a) merupakan elemen awal dari B. (ini berlaku juga untuk elemen akhir, minimum dan maksimum). Dapat dibuktikan dengan reductio ad absurdum.

(1) Carilah semua elemen maksimal dari B.
(2) Carilah semua elemen minimal dari B.
(3) Apakah B mempunyai elemen pertama atau elemen terakhir ?

9. Pandanglah W yang diorde sebagai berikut, dengan $W = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$

Tinjaulah himpunan bagian $V = \{4, 5, 6\}$ dari W.
(1) Carilah himpunan batas atas dari V.
(2) Carilah himpunan batas bawah dari V.
(3) Apakah sup (V) ada ?
(4) Apakah inf (V) ada ?

10. Misalkan $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ diurut sebagai berikut :

Tinjaulah himpunan bagian $E = \{2, 3, 4\}$ dari D
(1) Carilah himpunan batas atas dari E. (2) Carilah himpunan batas bawah dari E. (3) Apakah sup (E) ada ?
(4) Apakah inf (E) ada ?

11. Tinjaulah Q, yakni himpunan bilangan rasional, dan himpunan bagiannya $A = \{ x \mid x \in Q, x^3 < 3 \}$.
    (1) Apakah A terbatas di atas, yakni apakah A mempunyai sebuah batas atas ?
    (2) Apakah A terbatas di bawah, yakni apakah A mempunyai sebuah batas bawah ?
    (3) Apakah sup (A) ada ?
    (4) Apakah inf (A) ada ?

12. Misalkan Q adalah himpunan bilangan rasional. Ambil himpunan bagian dari Q yakni $B = \{ x \mid x \in Q, 2 < x^2 < 3 \}$ jadi B terdiri dari bilangan-bilangan rasional yang terletak di antara $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{3}$ pada garis bilangan riel. Apakah ada batas bawah dan batas atas untuk B ? Apakah ada batas atas terkecil dan batas bawah terbesar ?

13. Buktikanlah bahwa himpunan bilangan rasional Q dengan urutan alamiah similar dengan Q yang mempunyai urutan invers.

14. Jika $A = \{ 2, 3, 6, 12, 24, 36 \}$ dan R adalah relasi "x adalah faktor dari y", serta R' adalah relasi yang didefinisikan sebagai "x adalah kelipatan y" maka tunjukkan bahwa (A, R) dan (A, R') keduanya merupakan poset. Tunjukka pula bahwa (A, R) similar dengan (A, R').

IX. PENGENALAN BOOLEAN ABSTRACT ALGEBRA

1. PERKEMBANGAN MATEMATIKA

Sering kita mendengar pertanyaan "Apakah Matematika itu ?" Jawabab untuk pertanyaan ini tidak mudah diberikan secara eksplisit. Untuk memahami apakah matematika itu maka perludiktahui perkembangan matematika itu sendiri, dengan demikian pemahaman tentang apakah matematika itu dapat dipenuhi.

Telah diketahui bahwa matematika telah muncul jauh sebelum Masehi walaupun belum menggunakan nama Matematika dan belum terorganisasi dengan baik. Dapat dikatakan bahwa Mesir, Babilonia, Junani dan daerah sekitarnya merupakan tempat munculnya matematika. Oleh karena matematika itu muncul untuk memenuhi kebutuhan praktis pada saat itu, maka Geometri dan Aritmetika adalah cabang matematika yang mula-mula dikenal. Aritmetika (Ilmu Hitung) dibutuhkan dalam interaksi seharihari dalam perdagangan dan sebagainya sedang Geometri dibutuhkan untuk pengukuran batas serta luas tanah, pengukuran isi tumpukan gandum dan sebagainya.

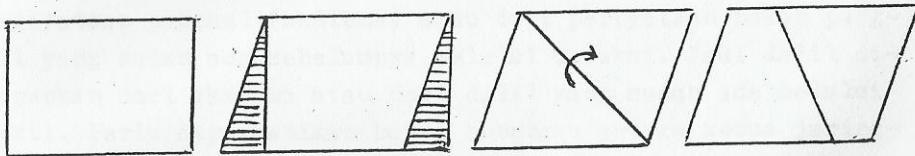
Oleh karena Geometri tumbuh dan berkembang sebagai salah satu cabang matematika yang tertua, tanpa mengesampingkan makna perkembangan cabang lainnya, maka untuk sampai kepada hakekat dan arti matematika, di sini ditempuh melalui jalur perkembangan geometri. Sebagaimana halnya dengan setiap ilmu maka Geometri memiliki obyek dan metode. Yang dimaksud dengan obyek suatu ilmu ialah hal-hal yang diselidiki dalam ilmu itu, sedangkan metode adalah cara-cara yang ditempuh untuk mendapatkan fakta-fakta dan menetapkan hukum-hukumnya.

Obyek dan metode mempunyai hubungan yang erat satu dengan yang lainnya; keduanya mengalami perkembangan.

Telah disebutkan di atas bahwa geometri di Mesir merupakan kebutuhan mendesak. Kita ketahui bahwa sekitar sungai Nil merupakan daerah pertanian yang subur. Namun secara berkala sungai Nil banjir dan menghapuskan batas-batas persawahan. Untuk Mengembalikan batas-batas tanah masing-masing pemilik tanah pertanian maka dibutuhkan pengetahuan geometri yang pada saat itu masih diberi nama Ilmu Ukur Tanah.

Perkembangan geometri mengalami benetapa fase hingga menjadi ilmu yang aksiomatik.

Fase Pertama. Pada fase ini yang menjadi obyek geometri adalah benda konkrit (benda alam, benda fisik), misalnya bahan bangungan seperti potongan kayu, batu alam, batu bata dan lain-lain, sebidang tanah, tumpukan gandum dan sebagainya. Metode yang digunakan adalah metode empiris, sedang fakta-fakta diperoleh dengan pengamatan. Hukum-hukum (yang biasa disebut dalil) ditetapkan dengan induksi. Misalnya dari beberapa benda yang bundar didapatkan dengan pengukuran bahwa kelilingnya sama dengan tiga kali panjang garis tengahnya (cara-cara pengukuran masih kasar). Maka ditetapkan dalil : Keliling semua lingkaran sama dengan tiga kali garis tengahnya. Pada fase ini belum ada usaha untuk menghubungkan dalil yang satu dengan dalil yang lainnya. Tiap-tiap dalil berdiri sendiri.

Fase kedua. Dengan makin bertambahnya dalil-dalil yang dikenal, timbullah kebutuhan untuk menghubungkan dalil yang satu dengan dalil yang lain. Misalnya diterangkan dengan cara bagaimana rumus untuk mencari luas daerah jajaran genjang dapat diperoleh dari rumus untuk mencari luas daerah persegi panjang. Perhatikan gambar berikut.

Dengan menarik kesimpulan secara deduktif, dari dalil-dalil yang sudah dikenal dapat diperoleh dalil yang baru. Dengan cara itu Hippocrates telah berhasil menemukan luas beberapa daerah yang berbentuk bulan sabit. Thales antara lain merumuskan beberapa dalil yang sederhana, yang sebelumnya sudah sering digunakan secara intuitif tetapi belum dieksplisitkan.

Sementara itu juga obyek geometri mengalami pergantian.

Diinsafi bahwa hal-hal yang dibicarakan dalam geometri seperti titik, garis, bidang dan sebagainya bukanlah benda alam melainkan 'benda' yang hanya kita pikirkan saja. 'Benda-benda' itu hanya ada dalam pikiran kita, dan karena itu selanjutnya kita sebut benda pikiran, tetapi kemiripan antara kedua jenis benda itu besar sekali, benda pikiran diperoleh dari benda alam dengan melakukan dua operasi pada benda alam itu, yaitu abstraksi dan idealisasi. Yang dimaksud dengan abstraksi ialah bahwa dari sifat-sifat suatu benda alam hanya sebagian saja yang diperhatikan, yaitu besar dan bentuknya. Semua sifat yang lain seperti berat, warna, bahan dan suhunya tidak diperhatikan. Idealisasi berarti penyempurnaan. Kertas yang tipis, kita sempurnakan tipisnya, artinya tebalnya kita jadikan nol, maka terjadilah bidang. Seutas benang yang kecil, kita sempurnakan kecilnya sehingga lenyap tabal dan lebarnya, dan hanya tinggal panjangnya saja, maka terdapatlah garis. Dengan cara demikian konsep titik diperoleh dari sebutir peluru yang kecil, konsep lurus diperoleh dari tongkat yang lurus dan sebagainya.

Fase ketiga. Setelah obyek geometri yang semula yaitu benda konkrit (benda fisik) diganti dengan benda pikiran, maka cara-cara yang dipergunakan lagi. Sebab benda yang hanya ada dalam pikiran kita, tidak dapat kita angkat, kita amat-amati atau kita ukur. Dengan demikian pemikiran induktif yang didasarkan atas hasil pengamatan dan percobaan tidak dapat dipakai lagi. Kecuali dengan alasan tadi, ternyata induksi tidak selalu menghasilkan dalil yang benar. Jadi jalan pikiran yang selanjutnya boleh dipakai ialah pemikiran deduktif saja.

Di atas telah diuraikan bahwa Thales dan Hippokrates dengan menggunakan pemikiran deduktif telah memperoleh dalil-dalil yang baru dari dalil-dalil yang sudah dikenal. Tetapi dalil-dalil yang sudah dikenal itu diperoleh dengan induksi yang pada saat itu sudah dilarang. Maka timbullah gagasan tentang susunan aksiomatis. Dalil-dalil yang diperoleh dari pengalaman (secara induktif) itu tidak boleh lagi disebut sebagai dalil melainkan disebut aksioma. Dari aksioma-aksioma

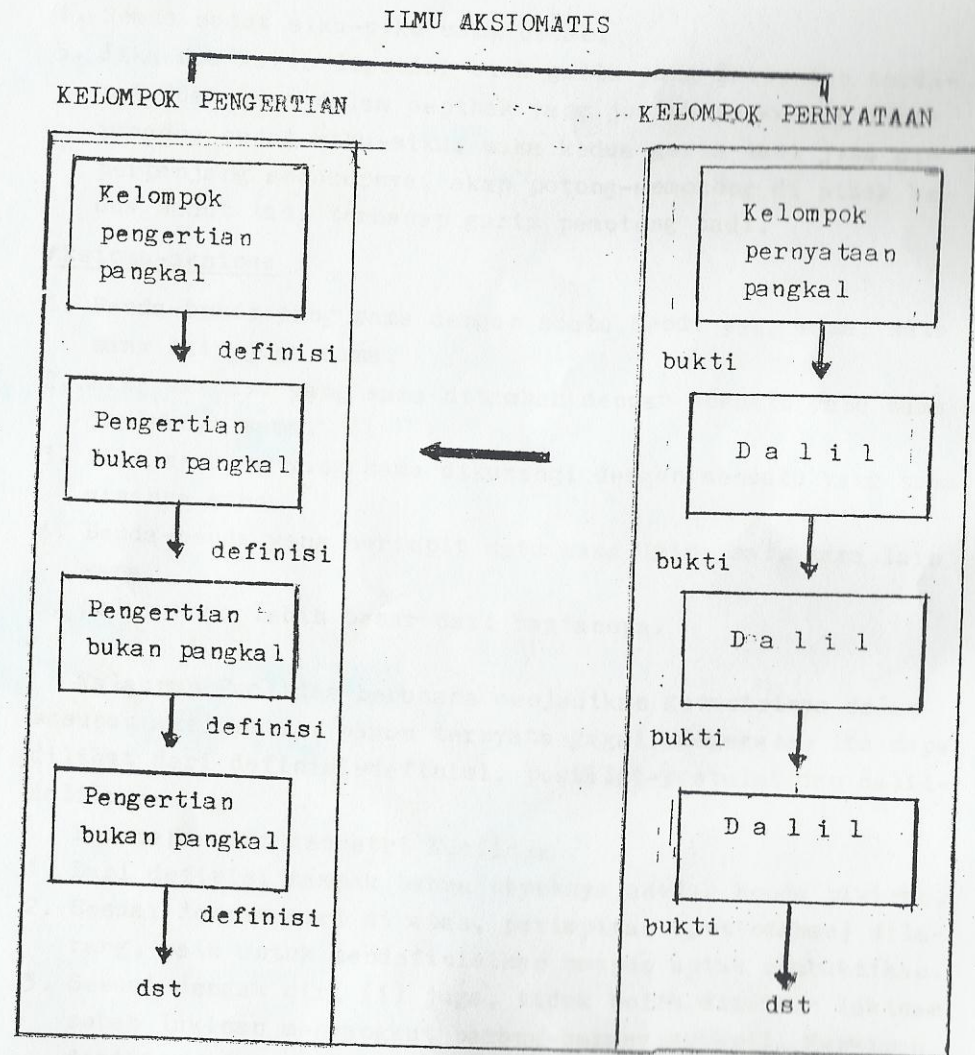
secara deduktif diturunkan dalil-dalil.

Juga pengertian-pengertian (konsep-konsep) mengalami penyusunan yang mirip dengan penyusunan dalil-dalil. Diinginkan agar semua pengertian didefinisikan. Tetapi hal itu tidak mungkin karena definisi tiap-tiap pengertian tentu menggunakan pengertian yang lain. Maka harus ditunjuk beberapa pengertian yang jumlahnya sesedikit mungkin dan yang cukup jelas, sehingga tidak perlu didefinisikan. Pengertian yang demikian ini disebut pengertian pangkal (primitive concept, undefined term, pengertian intuitif) . Sedang pengertian yang lainnya harus didefinisikan dengan dengan menggunakan pengertian pangkal, atau pengertian yang bukan pangkal yang telah didefinisikan lebih dahulu.

Struktur ilmu aksiomatis itu antara lain telah diuraikan oleh Aristoteles.

Struktur ilmu aksiomatis itu terdiri atas dua deretan (jaringan) yaitu jaringan pengertian dan jaringan pernyataan. Jaringan pengertian terdiri atas kelompok pengertian pangkal (pengertian intuitif) dan kelompok pengertian bukan pangkal. Setiap pengertian bukan pangkal diperoleh dari pengertian pangkal atau pengertian bukan pangkal yang sudah ada sebelumnya melalui definisi. Jaringan pernyataan terdiri dari kelompok pernyataan pangkal (aksioma) dan kelompok pernyataan bukan pangkal (dalil, teorema). Setiap dalil diperoleh dari pernyataan pangkal (aksioma) atau dari pernyataan bukan pangkal yang sudah ada sebelumnya melalui deduksi. Jadi dalil diturunkan dari aksioma atau dari dalil yang sudah ada melalui bukti. Perlu diperhatikan bahwa hubungan antara kedua jaringan ini ialah ialah bahwa semua pernyataan harus menyatakan hubungan atau relasi antar penfertian-pengertian.

Dengan susunan aksiomatis dari matematika itu, orang sering mengidentifikasikan matematika itu dengan ilmu aksiomatis. Dengan demikian nama matematika itu dihubungkan dengan struktur dan metodenya. Apa sajapun obyek suatu ilmu, apabila ilmu itu ilmu itu disusun secara aksiomatis dan metode yang digunakan untuk menurunkan teorema melalui metode deduktif maka ilmu itu menjadi cabang matematika.

Dengan skema, struktur ilmu aksiomatis itu dapat digambarkan seperti diagram berikut.

Sekarang timbul pertanyaan : Dapatkah geometri disusun secara aksiomatis ? Dengan kata lain : Dapatkah geometri dijadikan cabang matematika dalam pengertian baru ini ?

Banyak ahli matematika berusaha membuat susunan yang dimaksud dan hasilnya semua diberi nama "UNSUR-UNSUR" atau "ELEMENTS". Rupa-rupanya semuanya buku itu belum memuaskan, sebab waktu buku Unsur-unsur karangan Euclides terbit dalam tahun 300 SM lenyaplah semua buku-buku Unsur-unsur yang lain. Dengan demikian buku karangan Euclides itu menjadi satu-satunya buku yang berjudul Unsur-unsur dan memuat susunan geometri mulai dari aksioma-aksioma. Dengan Unsur-unsur Euclides itu geometri memasuki fasenya yang ketiga, yang bertahan lebih dari 20 abad lamanya.

Buku ini terdiri atas 13 bab, yang biasanya tiap bab disebut buku : 6 buah bukunya yang pertama membahas segitiga, segi-empat, lingkaran, segi-banyak, perbandingan dan kesebangunan. 4 buah buku berikutnya membicarakan ilmu bilangan.
1 buah (yang ke 11) memperkenalkan geometri ruang yang berhubungan dengan buku pertama.
1 buah (yang ke 12) membicarakan limas, kerucut dan tabung.
1 buah (yang ke 13) membahas kelima bidang banyak beraturan yaitu kubus, tetrahedron (bidang empat), octahedron (bidang delapan), icosahedron (bidang duapuluh) dan dodecahedron (bidang duabelas).

Dalam bukunya yang pertama, Euclides mulai dengan 23 definisi, 5 postulat, 5 aksioma dan 48 dalil. Perhatikan bahwa Euclides menggunakan istilah untuk aksioma yang berlaku untuk ilmu yang bersangkutan sedang aksioma digunakannya untuk prinsip-prinsip umum, yaitu yang berlaku untuk segala hal). Di bawah ini diperkenalkan 5 definisi, kelima postulatnya, kemudian kelima aksioma (prinsip-prinsip umum).

Definisi-definisi :

1. Titik ialah yang tidak mempunyai bagian.
2. Garis ialah panjang tanpa lebar.
3. Ujung-ujung suatu garis ialah titik-titik.
4. Garis lurus ialah garis yang terletak rata dengan titik-titik yang terletak pada garis itu.
5. Bidang ialah sesuatu yang hanya mempunyai panjang dan lebar.

Dan seterusnya.

Postulat-postulat.

1. Melalui dua titik dapat dibuat satu garis.
2. Garis dapat diperpanjang tanpa batas.
3. Dengan pusat dan jari-jari yang diketahui dapat dibuat satu lingkaran.
4. Semua sudut siku-siku sama besar.
5. Jika dua garis dipotong oleh garis yang lain, dan terdapat dua sudut dalam sepihak yang jumlahnya kurang daripada dua sudut siku-siku, maka kedua garis tadi jika diperpanjang secukupnya, akan potong-memotong di pihak kedua sudut tadi terhadap garis pemotong tadi.

Aksioma-aksioma :

1. Benda-benda yang sama dengan suatu benda yang sama, satu sama lain juga sama.
2. Jika sesuatu yang sama ditambah dengan sesuatu yang sama jumlahnya sama.
3. Jika sesuatu yang sama dikurangi dengan sesuatu yang sama, sisanya sama.
4. Benda-benda yang berimpit satu sama lain, satu sama lain sama.
5. Seluruhnya lebih besar dari bagiannya.

Walaupun Euclides berusaha menjadikan geometrinya dalam susunan aksiomatis, namun ternyata gagal. Kegagalan itu dapat dilihat dari definisi-definisi, postulat-postulat dan dalil-dalilnya.

Beberapa ciri geometri Euclides :

1. Dari definisi tampak bahwa obyeknya adalah benda pikiran.
2. Sesuai dengan ciri di atas, perimpitan (pemindahan) dilarang, baik untuk mendefinisikan maupun untuk membuktikan.
3. Sesuai dengan ciri (1) juga, tidak boleh diadakan lukisan sebab lukisan menyangkut barang-barang konkrit. Meskipun demikian, dalam merumuskan aksioma-aksioma eksistensial dan dalil-dalil eksistensi, Euclides sering meminjam istilah-istilah lukisan.

Contoh :

Dalil 1 berbunyi : Melukis segitiga samasisi yang bersisikan

Maksudnya ialah jika diketahui suatu ruas garis maka ada segitiga samasisi yang bersisikan ruas garis tadi.
Kelemahan lainnya ialah :
Euclides berusaha untuk mendefinisikan semuanya dalam geometri sampai kepada pendefinisian titik, garis dan bidang.
Jika diperhatikan definisinya yang pertama : Titik ialah yang tidak mempunyai bagian. Maka perlu didefinisikan apa yang dimaksud dengan bagian.
Dalam buku Euclides tidak disebut pengertian-pengertian manakah yang merupakan pengertian pangkal.
Dalam definisinya yang kedua : Garis ialah panjang tanpa lebar, maka perlu didefinisikan pula apa yang dimaksud dengan panjang, apa pula yang dimaksud dengan lebar.
Tampak bahwa memang harus ada pengertian-pengertian pangkal.

Fase keempat. Setelah kekurangan-kekurangan ditemukan pada geometri Euclides maka orang berusaha untuk menyempurnakannya. Usaha ini berhasil dalam tahun 1899. Dalam tahun itu terbitlah buku "Grundlagen der Geometrie" karangan Hilbert, yang memenuhi syarat ilmu yang aksiomatis.
Dengan demikian geometri tiba pada fase keempat. Dalam fase ini geometri dimulai dengan sekelompok istilah-istilah yang tidak didefinisikan dan pernyataan-pernyataan yang tidak dibuktikan. Bedanya ialah bahwa pada fase ketiga geometri masih merupakan usaha untuk lebih mengenal ruang tempat kita hidup dan benda-benda di dalamnya. Pengertian-pengertian pangkalnya tidak didefinisikan tetapi siapa saja dianggap mengetahui apa yang dimaksud (self-evidence, mengerti dengan spontan)
Aksioma-aksiomanya tidak dibuktikan, tetapi siapa saja yakin akan kebenarannya berdasarkan pikiran jernih.(berdasarkan intuisi dan pengalaman).
Dalam fase keempat istilah-istilah pangkal tidak didefinisikan dan kita bebas untuk memberi arti kepada istilah-istilah itu sekehendak kita, hanya dengan suarat bahwa arti itu cocok dengan aksioma-aksioma yang telah ditetapkan. Dalam fase ketiga tiap-tiap aksioma jelas kebenarannya, sedang dalam fase keempat tidak dipersoalkan benar atau salahnya. Yang jelas ialah bahwa aksioma itu diberi nilai benar. Kelompok aksioma tidak boleh mengandung pertentangan (jadi harus konsisten), harus lengkap dan tidak mengandung dependensi (ketergantungan satu sama lainnya).

Untuk lebih mengenal matematika sebagai ilmu aksiomatis maka di bawah ini akan dibicarakan lebih lanjut "Elements" dari Euclides.

Perhatikanlah kembali postulat-postulat, aksioma-aksioma dan definisi-definisi dari Euclides. Jelas bahwa baik postulat maupun aksiomanya mengikuti (memenuhi) evidensi postulat dari Aristoteles (evident : jelas tanpa bukti). Sesuai dengan syarat-syaratnya ilmu deduktif dari Aristoteles maka Euclides juga memberikan sejumlah definisi. Maksudnya sama seperti maksud Aristoteles yaitu mengintrodusir aksioma dan postulat dengan maksud : Mempertinggi rigour (mempertajam penalaran) dan preciseness (ketepatan ungkapan).

Dari geometri Euclides tampak bahwa penekanannya dalam usahanya menyusun Elements ialah :

1. Postulat, aksioma dan selanjutnya juga teorema-teoremanya adalah merupakan pernyataan-pernyataan yang benar tentang dunia nyata.
2. Teorema-teoremanya adalah sum-total dari fakta-fakta geometris yang dikenal waktu itu.
3. Semua fakta geometris dari dunia nyata dapat diturunkan dari aksioma-aksiomanya dengan menggunakan logika melulu. Dengan kata lain aksioma-aksiomanya memuat seluruh ilmunya in embrio sehingga dapat dikatakan mencakup semua fakta-fakta geometris.

Karya Euclides merupakan prototype dan dipandang sebagai contoh dan idealnya suatu ilmu deduktif. Apabila Spinoza hendak menekankan sifat deduktif dari Ethik-nya, maka ia menyebut dan mengkarakterisasikannya dengan "more geometrico demonstrata" (diturunkan dengan langkah-langkah sesuai dengan geometri).

Akan tetapi setelah selama lebih kurang 22 abad lamanya karya Euclides dipandang sebagai contoh yang sangat cemerlang (par excellance) dari suatu ilmu deduktif, akhirnya para matematisi, terutama Pasch dan Hilbert pada akhir abad yang lalu memperlihatkan bahwa Euclides gagal total mencapai maksudnya. Aksioma-aksioma tentang "betweenness" (keantaraan) dan "continuity" (kontinuitas) yang mutlak diperlukan jika penurunan-penurunan hendak dikerjakan murni bersifat logika, sama sekali tidak disebut-sebut. Definisi-definisinya sangat menyedihkan. Dengan kata lain rigour (ketajaman penalaran) dan preciseness (ketepatan ungkapan) ternyata sangat tumpul.

Namun biarpun belakangan ditemukan kekurangan-kekurangan dalam Elements, harus diakui bahwa usaha Euclides sangat dihargai sebagai perintis kepada matematika sebagai ilmu aksiomatis.

2. MATERIAL AXIOMATICS, FORMAL AXIOMATICS DAN FORMALIZED AXIOMATICS.

Aksiomatika Euclides disebut AKSIOMATIKA MATERIAL karena berbicara tentang suatu materi tertentu, yaitu unsur-unsur di dunia nyata, unsur-unsur dari ruangan di mana kita berada. Terminus teknis yang dipakai oleh Euclides seperti "titik", "garis" dan lain-lainnya menyajikan sesuatu yang mempunyai arti sebagai unsur dari ruangan tersebut di atas.

Sebagaimana telah dikemukakan di atas bahwa Euclides gagal total mencapai maksudnya, yaitu kegagalannya menyajikan geometri sebagai suatu ilmu deduktif. Maksudnya menurunkan teorema-teorema dengan logika murni, dengan tidak menyandarkan langkah-langkah dalam penalarannya pada geometrical intuition (intuisi geometri) mengalami kegagalan.

Matematikawan pertama yang dapat menyajikan geometri sebagai ilmu deduktif yang tak tercela sampai pada saat ini ialah David Hilbert.
Hilbert dapat mencapai hal ini debgan melakukan langkah-langkah original dan mengejutkan seperti berikut ini.

Apabila deduksi benar-benar dilakukan dengan murni, yaitu hanya menggunakan sifat-sifat dari unsur-unsur yang tercantum di dalam aksioma-aksioma saja (dengan tidak menggunakan sesuatu intuisi, intuisi geometri ataupun non geometris - without appeal to any intuition, geometrical or non geometrical) maka terminus-terminus pokok (kata titik, garis dll) yang ada dalam aksiomanya (kata-kata itu merupakan lambang dari unsur-unsur pokok dari geometri) harus dapat diberlakukan sebagai lambang-lambang belaka, yaitu tanda-tanda yang tidak mempunyai arti (devoid of content - kosong dari arti). Sebab mengatakan bahwa arti dari kata-kata itu masih diperlukan di dalam deduksi, adalah ekuivalen dengan mengatakan bahwa tidak semua sifat dari unsur-unsur pokok yang tercantum dalam aksioma-aksiomanya. Karena dikosongkan dari semua arti maka terminus-terminus pokok tadi disebut undefined terms.
Demikian juga setiap terminus baru yang hendak dipakai dalam teorinya harus didefinisikan dalam arti yang tepat (prcise) yaitu harus dapat dikembalikan kepada unsur-unsur kosong dari arti (undefined terms) tersebut di atas. Maka dari itu undefined terms tersebut di atas disebut juga primitive terms.
Apabila semua hal ini telah dikerjakan, sehingga semua technical terms kosong dari arti maka sampailah kita pada pengertian AKSIOMATIKA FORMAL (formal axiomatics).
Perhatikanlah bahwa dengan demikian aksioma-aksiomanya sekarang tidak lagi merupakan self-evidence truth (kebenaran-kebenaran yang langsung dapat ditangkap oleh pikiran secara spontan). Sebab jelas absurd (mustahil) untuk menyatakan suatu pernyataan bernilai benar atau salah sedang pernyataan itu mengandung terminus yang kosong dari arti. Aksioma-aksioma dalam aksiomatika formal merupakan semupakatan belaka, yaitu menyatakan sifat-sifat dan relasi-relasi (yang dengan sendirinya juga undefined) antara primitive (undefined) terms yang terdapat dalam aksioma-aksioma tadi, dan yang kita mufakati berlaku, jadi diberi nilai T (true).

Catatan : Suatu kalimat dikatakan bernilai benar apabila ada

Benar / salah — punya arti

persesuaian antara apa yang dinyatakan oleh kalimatnya dengan dunia nyata. Sehingga mustahil menentukan nilai kebenaran kalimat yang mengandung sesuatu yang tidak diberi arti.

Selain Grundlagen der Geometrie dari Hilbert sebagai perbaikan dari geometri Euclides tersebut di atas juga dalam Aljabar Abstrak seperti grup, ring dsb, unsur-unsurnya kosong dari arti, jadi unsur-unsurnya juga undefined.

Dengan adanya undefined terms yang kosong dari arti ini maka Russel pernah berkata secara senda gurau : "In mathematics we do not know what are we talking about, nor whether what we say is true".

Walaupun fundamentally ucapan Russel benar, namun janganlah ucapan ini ditangkap terlalu harafiah. Demikianlah ada orang yang menafsirkan ucapan di atas secara demikian. Dalam matematika orang tidak boleh memberi arti pada unsur-unsurnya. Hal ini jelas jelas keliru. Apabila untuk kepentingan tertentu yaitu mempertajam rigour, orang bertingkah seakan-akan unsur-unsurnya tidak mempunyai arti, maka hal ini adalah lain dengan mengatakan tidak boleh memberi arti padanya. Justru sebaliknya apabila terminus-terminus pokok dalam aksioma-aksioma itu kosong dari arti, maka ada kemungkinan untuk memberi arti lebih dari satu interpretasi padanya. Yaitu mungkin ada lebih dari satu macam unsur yang memenuhi aksioma-aksiomanya. Ini merupakan suatu keuntungan. Sebab, segala sesuatu yang dapat diturunkan dari sistem aksioma yang memuat undefined terms dengan sendirinya berlaku juga untuk semua interpretasi dari padanya. Keuntungan lain dari memandang unsur-unsurnya kosong dari arti terlihat pada sejarahnya postulat paralel (postulat kelima) dari Euclides. Postulat ini tidak memiliki derajat evidensi seperti aksioma-aksioma lainnya sehingga orang sepanjang sejarah berusaha membuktikannya. Tetapi setiap usaha ini menemui kegagalan. Ternyata hal ini tidak oleh ketidak mampuan para matematisi, melainkan karena postulat ini memang tidak dapat dibuktikan atas aksioma-aksioma lainnya. Jika unsur-unsurnya kosong dari arti maka seperti dikatakan di atas aksioma-aksiomanya merupakan semufakatan belaka. Apa-

bila demikian maka aksioma itu bisa diganti dengan ingkaran darinya. Dengan demikian terbentuklah non Euclidean geometries yang sebagai sistem logika mempunyai status sejajar dengan geometri Euclides.

Pembicaraan di atas memperlihatkan bahwa :

Usaha meningkatkan rigour yaitu mempertajam penalaran mendorong orang mengganti material axiomatics dengan formal axiomatics di mana unsur-unsur teknisnya kosong dari arti. Aksioma-aksioma dalam formal axiomatics adalah ucapan-ucapan kosong dari arti. Walaupun ucapan-ucapan itu sering dipengaruhi oleh dunia nyata namun secara prinsipil dapat dipikirkan diciptakan lepas dari pengamatan dunia nyata. Suatu ciptaan bebas dari pikiran kita. Dengan demikian intuk aksioma-aksioma ini digunakan kata semufakatan. Secara a priori, dalam hal ini bisa terjadi tiga hal jika diadakan interpretasi dari unsur-unsur kosong dari arti itu :

1. Tidak ada sistem obyek-obyek yang memenuhi aksioma-aksiomanya. Jika demikian, sistemnya disebut kosong.
2. Terdapat ada satu sistem obyek-obyek yang memenuhinya, atau apabila ada lebih dari satu sistem maka sistem-sistem itu isomorphic.

   Dua sistem obyek-obyek disebut isomorphic bilamana dan hanya bilamana kedua sistem itu memuat "banyak anggota yang sama", dalam arti dapat diadakan korespondensi satu-satu sedemikian sehingga dengan setiap obyek dari sistem yang satu dapat dikawankan secara tunggal satu obyek pada sistem yang lain dan sebaliknya, sedemikian sehingga setiap relasi di antara obyek-obyek itu dibawa.

   Jika demikian maka aksioma-aksioma itu disebut categorial.
3. Lebih dari satu sistem obyek-obyek yang memenuhi ucapan-ucapan dalam aksioma-aksiomanya. Aksioma-aksioma seperti ini disebut ambiguous.

Sekarang akan dibicarakan FORMALIZED AXIOMATICS.
Usaha mencapai rigour yang lebih tinggi mengobah material axiomatics menjadi formal axiomatics. Usaha yang sama, yaitu mencapai rigour yang lebih tajam lagi mengakibatkan dilakukannya langkah-langkah lebih lanjut, mengobah formal axiomatics menjadi formalized axiomatics, sebagai sistem yang terdiri atas tanda-tanda di mana setiap tanda itu kosong dari arti. Tanda-tanda itu dimanipulasi menurut aturan-aturan mekanis sehingga seluruhnya menyerupai suatu permainan belaka, seperti catur. Akan tetapi suatu permainan pada mana dicerminkan gerakan-gerakan pikiran yang paling eksak, yang paling rigour. Walaupun terminus-terminus teknis pada aksiomatika formal, seperti titik, garis dsb dikosongkan dari arti, namun mereka masih mempunyai sifat-sifat gramatika sebagai kata benda, obyektif dsb, sehingga kalimat-kalimat yang memuat mereka dapat dibentuk dengan aturan gramatika dari bahasa biasa. Selain dari itu dalam formal axiomatics masih terdapat terminus terminus logika seperti "atau", "apabila ... ", kuantor-kuantor "untuk semua", "terdapatlah" dsb. Terminus logika ini memiliki arti yang biasa yang digunakan dalam deduksi. Dengan kata lain, deduksi dalam formal axiomatics mengandung arti dan memang dimaksud sebagai uraian-uraian yang meyakinkan (the deductions carry connectio). Inilah yang digunakan dalam praktek yang lazim digunakan dalam matematika biasa yang diajarkan di sekolah. Sebahabian mari materinya disajikan dalam simbolisme khusus dan sebahagian dengan bahasa biasa. Suatu teorema dinyatakan benar apabila orang mempunyai bukti yang sahih dari padanya. Demikian juga dengan material axiomatics, misalnya pada geometri Euclides. Kesahihan suatu bukti diuji dan diteliti apakah langkah-langkahnya sesuai dengan hukum-hukum logika, dan yang terakhir ini didasarkan atas intuisi logika, yang dianggap dimiliki oleh setiap manusia, dan dipertajam di sekolah-sekolah dengan belajar.
Memang apabila menyangkut bagian-bagian elementer dari matematika maka dengan spontan kita dapat mengatakan apakah lang-

kah dalam suatu pembuktian itu correct atau tidak. Akan tetapi apabila langkah-langkah logika itu menyangkut bagian-bagian non elementer dari matematika, maka ternyata bahwa kesahihan, correctness suatu bukti itu mengandung faktor yang subyektif. Hal ini sangat mengejutkan, namun ternyata memang demikianlah halnya.
Bahasa alami (bahasa biasa, natural language) tidak mungkin mencapai ketepatan yang diperlukan untuk matematika. Bagaimanapun cermatnya kata-kata dipilih selalu ada suatu "amount free play", yang disebabkan karena masing-masing orang dibesarkan dalam lingkungan yang berbeda-beda. Lingkungan-lingkungan ini membentuk konnotasi-konnotasi yang berbeda-beda pula. Hal ini menyebabkan partisipan-partisipan dalam suatu dialog sering meleset menangkap maksud masing-masing. Hal ini juga menyebabkan material axiomatics maupun formal axiomatics tidak dapat mencapai preciseness dan rigour setinggi-tingginya, oleh karena keduanya sistem aksiomatik ini masih menggunakan bahasa alami.

Maka dari itu untuk mencapai ketajaman dan ketepatan yang setinggi-tingginya FORMALIZED AXIOMATICS membentuk bahasa buatan (artificial language) dengan mengosongkan segala-galanya dari arti. Maka suatu formal system dalam formalized axiomatics terdiri atas :

1. Kosa-kata (vocabulary) yang terdiri atas tanda-tanda kosong dari arti yang terbagi atas konstan-konstan dan variabel-variabel

Apabila diinterpretasikan, konstan-konstan itu merupakan nama-nama dari unsur-unsur matematika dari sistem yang hendak diformaliser. Dengan kata lain, konstan-konstan itu mmenunjuk pada unsur-unsur matematika tertentu. Sedangkan variabel-variabel adalah juga tanda-tanda kosong dari arti yang apabila diinterpretasikan menunjuk pada anggota-anggota sembarang dari suatu domain matematika.
Dalam kosa-kata ini termasuk pula logical connectives "&", "v" dsb, kuantor "(E-)", "(A-)". Tetapi dalam matematika biasa,

Himpunan B = {x, y, z, . . . , 0, 1, + , • , ' } terdiri atas undefined elements (elemen kosong dari arti) yaitu x, y, z, . . . , 0, 1 yang dilengkapi dengan dua operasi biner (+) dan (.) dan satu operasi uniter (') (disebut berturut-turut penjumlahan, pergandaan dan komplementasi) merupakan Aljabar Bool Abstrak bhb dipenuhi aksioma-aksioma closure (tertutup) dan

1. $x\,y = y\,x$

   $x + y = y + x$

2. $x\,(y + z) = x\,y + x\,z$

   $x + (y\,z) = (x + y)(x + z)$

3. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

   $0 + x = x + 0 = x$

4. $x + x' = 1$

   $x\,x' = 0$

   di mana x' adalah elemen dari B yang selalu dapat ditemukan untuk setiap x.

Perhatikan bahwa penjumlahan dan pergandaan bukanlah penjumlahan dan pergandaan aritmetika, melainkan hanya penamaan. Di sini terlihat bahwa baik elemen-elemen B maupun operasi-operasi yang digunakan, semuanya kosong dari arti. Kosongnya arti dari elemen-elemen maupun operasi-operasi ini memungkinkan nantinya dapat diinterpretasikan dengan apa sajapun. Jika penginterpretasian ini memenuhi aksioma-aksioma Boolean Abstract Algebra ini, maka semua teorema (hukum-hukum yang diturunkan dari padanya, akan berlaku pula bagi obyek-obyek hasil interpretasi itu.

Sebagai contoh, berikut ini dikemukakan beberapa interpretasi.

ALJABAR BOOL ABSTRAK	ALJABAR HIMPUNAN	HITUNGAN KALIMAT	RANGKAIAN LISTRIK
+	$\cup$	v	paralel
•	$\cap$	&	seri
x'	x^c	x	x lewatkan arus, x' putuskan arus
1	S	T	arus lewat
0	$\emptyset$	F	arus putus

A. Penyelidikan untuk himpunan.

1. $x \cap y = y \cap x$

   $x \cup y = y \cup x$

2. $x \cap (y \cup z) = x \cap y \,.\cup.\, x \cap z$

   $x \cup (y \cap z) = x \cup y \,.\cap.\, x \cup z$

3. $x \cap S = S \cap x = x$

   $\emptyset \cup x = x \cup \emptyset = x$

4. $x \cup x^c = S$

   $x \cap x^c = \emptyset$

Ternyata aksioma Aljabar Bool Abstrak berlaku untuk himpunan.

B. Penyelidikan untuk kalimat.

1. $p \,\&\, q \Longleftrightarrow q \,\&\, p$

   $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$

2. $p \,\&\, (q \vee r) \Longleftrightarrow p \,\&\, q \,.\vee.\, p \,\&\, r$

   $p \vee (q \,\&\, r) \Longleftrightarrow p \vee q \,.\&.\, p \vee r$

3. $p \,\&\, T \Longleftrightarrow T \,\&\, p \Longleftrightarrow p$

   $p \vee F \Longleftrightarrow F \vee p \Longleftrightarrow p$

4. $p \,\&\, p' \Longleftrightarrow F$

   $p \vee p' \Longleftrightarrow T$

Ternyata juga aksioma Aljabar Bool Abstrak berlaku untuk hitungan kalimat.

Penyelidikan terhadap rangkaian arus listrik ternyata juga memenuhi aksioma Aljabar Bool Abstrak. Hal ini akan dibicarakan tersendiri.

Berikut ini akan dibicarakan tentang PRINSIP DUALITAS.
Jika diperhatikan kembali aksioma Aljabar Bool Abstrak, maka aksioma itu selalu timbul berpasangan, yang satu didapat dari yang lainnya.

- . diganti dengan + dan sebaliknya
- ' diganti dengan ' sendiri
- 1 diganti dengan 0 dan sebaliknya
- tanda-tanda kesamaan tetap, juga tanda-tanda logika tetap.

Akibatnya ialah, bahwa semua teorema yang diturunkan dari aksioma ini akan muncul berpasangan. Prinsip munculnya secara berpasangan inilah yang disebut Prinsip dual.
Dengan prinsip dual ini pulalah pekerjaan menjadi :
"the work is cut in half".

Perhatikanlah salah satu teorema yang diturunkan dari aksioma itu.

$x\,x = x$ dualnya $x + x = x$

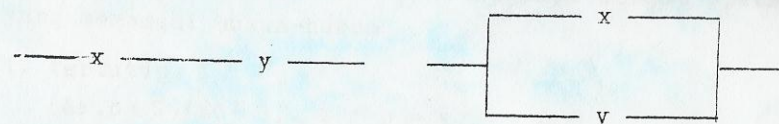
Bukti.

$x \overset{3}{=} x\,1 \overset{4}{=} x\,(x + x') \overset{2}{=} x\,x + x\,x' \overset{4}{=} x\,x + 0 \overset{3}{=} x\,x$

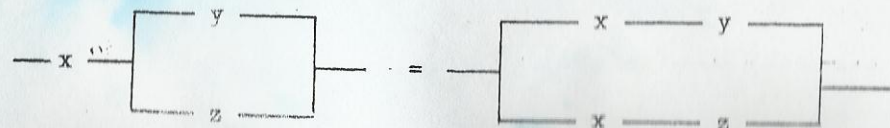
dualnya

$x \overset{3}{=} x + 0 \overset{4}{=} x + x\,x' \overset{2}{=} (x + x)(x + x') \overset{4}{=} (x + x')\,1 \overset{3}{=} x + x$ (Tanda di atas "=" adalah nomor aksioma)

4. SWITCHING CIRCUIT ALGEBRA (RANGKAIAN ARUS LISTRIK)

Salah satu interpretasi Aljabar Bool Abstrak ialah rangkaian arus listrik.
Andaikanlah x, y, z, ... saklar listrik dan andaikan x dan x' menyatakan saklar dengan sifat bahwa jika salah satu di antaranya tersambung (tertutup - on) maka yang satu lagi terputus.(terbuka - off), dan sebaliknya. Dua saklar, misalkan x dan y dapat dihubungkan oleh kawat dalam kombinasi seri atau paralel sebagai berikut :

Hubungan seri: $x\,y$ Hubungan paralel : $x + y$

Misalkanlah bahwa $x\,y$ menyatakan bahwa x dan y dihubungkan seri dan $x + y$ menyatakan bahwa x dan y dihubungkan paralel. Switching circuit algebra ini merupakan penyusunan rangkaian pengganti terdiri dari susunan kawat dan sakelar sedemikian rupa sehingga hasil yang diperoleh sama. Penyusunan rangkaian ini didasarkan kepada aksioma Aljabar Bool Abstrak yang ternyata dipenuhi oleh jaringan listrik. Sudah barang tentu semua teorema dalam Aljabar Bool ini akan dipenuhi pula dalam Switching circuit algebra ini.

Sebagai contoh, perhatikanlah aksioma 2 yang pertama yaitu : $x\,(y + z) = x\,y + x\,z$. Tanda "=" di sini diartikan "sama-sama arus diputuskan atau sama-sama arus dilewatkan".
Perhatikanlah gambar berikut :

$x\,(y + z) = x\,y + x\,z$

Tanda 1 diartikan : selalu lewat arus, 0 berarti arus putus.

tanda-tanda ini mempunyai arti biasa, namun dalam bahasa buatan ini mereka mereka kosong dari arti, hanya apabila diinterpretasi mereka mendapatkan arti.

2. <u>Formation rules</u> (grammar), yaitu aturan-aturan mekanis dengan mana menggunakan kosa-kata yang tersedia, dibentuk apa yang disebut <u>well formed formulae</u> (disingkat <u>wff</u>), yaitu rangkaian tanda-tanda yang diperbolehkan (dikonstruksikan) menurut aturan mekanis itu.

3. <u>Transformation rules</u>, yaitu merupakan aturan-aturan mekanis yang memungkinkan kita dari formulae yang sudah berada dalam sistemnya mendapatkan formulae baru.

Demikianlah, dengan formalized axiomatics, ketajaman penalaran dan ketepatan ungkapan (rigour dan preciseness) memperoleh puncaknya.

Namun, apakah formalized axiomatics sudah sempurna ? TIDAK ADA KESEMPURNAAN.

Godel, kemudian memperlihatkan ketidak sempurnaan formalized axiomatics ini. (disini tidak dibicarakan).

3. BOOLEAN ABSTRACT ALGEBRA

? Perhatikanlah himpunan-himpunan beserta operasi-operasi dalam himpunan yang bersangkutan di bawah ini.

a. $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$ dilengkapi dengan operasi + aritmetika.

b. $R - \{0\}$ dilengkapi dengan operasi . aritmetika.

c. Himpunan vektor dilengkapi dengan operasi penjumlahan vektor.

d. $\{1, -1\}$ dilengkapi dengan operasi penggandaan aritmetika

e. Himpunan matriks bertipe 2 x 2 dilengkapi dengan operasi penjumlahan vektor.

Untuk semua himpunan di atas dengan operasi masing-masing berlaku sifat-sifat :

1. closure (tertutup)
2. assosiatif
3. ada elemen netral
4. setiap elemen mempunyai invers

(Selidikilah masing-masing)

Sekarang dilakukan abstraksi total (pengosongan dari arti) baik terhadap himpunan maupun trhadap operasi. Maka terjadilah $G = \{a, b, c, \ldots\}$ dilengkapi dengan operasi * yang memenuhi hukum-hukum

1. tertutup
   $(\mathrm{A}a, b \in G)(\mathrm{E}c \in G).\ a * b = c$
2. assosiatif
   $(\mathrm{A}a, b, c \in G)\left[(a * b) * c = a * (b * c)\right]$
3. ada elemen netral
   $(\mathrm{A}a \in G)(\mathrm{E}!\, e \in G).(a * e = e * a = a)$
4. Tiap elemen mempunyai invers
   $(\mathrm{A}a \in G)(\mathrm{E}a^{-1} \in G).\ (a * a^{-1} = a^{-1} * a = e)$

merupakan suatu sistem dalam formalized axiomatics.

Perhatikan bahwa baik himpunannya maupun operasinya tidak diberi arti, jadi kosong dari arti.
Tanda * dibaca : dikomposisikan dengan.

Contoh yang sangat penting dalam sistem formalized axiomatics adalah Abstract Boolean Algebra berikut ini.

INTERPRETASI AKSIOMA BOOLEAN ABSTRACT ALGEBRA

	BOOLEAN ABSTRACT ALGEBRA	ALJABAR HIMPUNAN	ALJABAR KALIMAT	SWITCHING CIRCUIT ALG.
NOTASI	x,y,... variabel, sekaligus elemen-elemen	x,y,... variabel, sekaligus elemen.himp.	p,q,... sentencional var. two elem.Bool.Alg. (T,F)	x,y,...variables, two el.Bool.Alg (lewatkan arus, putuskan arus)
	=	= kesamaan himpunan x = y	memp. nilai logik sama p ⟺ q	= memp.nilai listr.sama x = y
	x + xy	x ∪ (x ∩ y)	p v (p & q)	x + xy
	+	∪	v	+ (paralel)
	.	∩	&	. (seri)
	x'	[illegible]	[illegible]	x lewatkan arus x' putuskan arus
	1	S	[illegible]	arus lewat
	0	∅	[illegible]	arus putus
AKSIOMA	1. xy = yx x + y = y + x	x ∩ y = y ∩ x x ∪ y = y ∪ x	[illegible]	[illegible]
	2. x(y + z) = xy + xz x + yz = (x+y)(x+z)	x ∩ (y ∪ z) = x∩y ∪ x∩z x ∪ (y ∩ z) = x∪y ∩ x∪z	[illegible]	[illegible]
	3. x.1 = 1.x = x x + 0 = 0 + x = x	x ∩ S = S ∩ x = x x ∪ ∅ = ∅ ∪ x = x	[illegible]	[illegible]
	4. x + x' = 1 x x' = 0	x ∪ x' = S x ∩ x' = ∅	[illegible]	[illegible] = —1— [illegible] = —/0—

Berikut ini akan disajikan beberapa teorema dengan hanya menggunakan aksioma Aljabar Bool. Buktinya tidak diberikan tetapi dimaksud sebagai latihan.

B1. $x\,x = x$
$x + x = x$

B2. $x.0 = 0$
$x + 1 = 1$

B3. $x\,(x + y) = x$
$x + x\,y = x$

B4. $x\,(y\,z) = (x\,y)\,z$
$x + (y + z) = (x + y) + z$

B5. Komplemen x' dari x adalah tunggal

b6. $(x\,y)' = x' + y'$
$(x + y)' = x'\,y'$

Sekarang akan dibicarakan pemakaian Aljabar Bool Abstrak khusus dalam rangkaian arus listrik dan kaitannya debgan logika kalimat.

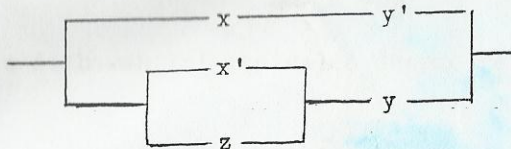
Perhatikanlah tabel interpretasi yang telah dikemukakan di atas bahwa operasi"(.)"dan"(+)"dalam Aljabar Bool dapat diinterpretasikan dengan operasi (kata penggandeng) "&" dan "v" pada Logika Kalimat, demikian juga dengan operasi "rangkaian seri" dan "rangkaian paralel" pada rangkaian arus listrik. Maka dengan demikian, rangkaian seri dan rangkaian paralel pada jaringan listrik dapat pula dijelaskan dengan penggunaan kata penggandeng "&" dan "v".

Rangkaian di bawah ini dapat dijelaskan oleh $x \,\&\, (y \vee x')$.

Untuk menyelidiki sifat rangkaian tersebut, yaitu untuk menyelidiki bilakah rangkaian tersebut tertutup (arus mengalir) dan bilakah rangkaian tersebut terbuka (arus tidak mengalir) dapat dilakukan dengan menyusun tabel kebenaran untuk kalimat x & (y v x') sebagai berikut :

x	y	x'	y v x'	x & (y v x')
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

Dari tabel ternyata bahwa arus akan mengalir hanya jika keduanya x dan y tersambung.

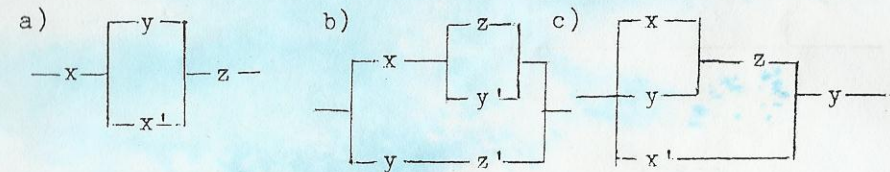
Pada gambar di bawah ini terdapat rangkaian yang dapat dijelaskan dari (x & y') v ((x' v z) & y).

Penyelidikan dilakukan melalui tabel berikut ini :

x	y	z	(x	&	y')	v	((x'	v	z)	&	y))
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
Langkah			1	2	1	4	1	2	1	3	1

Perhatikanlah bahwa tanda domominan dalam bentuk kalimat itu adalah tanda "v" yaitu langkah (4). Pada kolom tanda dominan ini yerdapat nilai-nilai 1 dan 0. Hal ini menandakan bahwa jika nilai listriknya 1 berarti bahwa rangkaian tertutup unkomposisi x, y dan z yang bersangkutan, sedang jika nilai listriknya 0 berarti bahwa rangkaian itu terbuka untuk komposisi x, y dan z yang bersangkutan. Tabel menunjukkan bahwa dalam keadaan seperti pada baris 1, 3, 4, 5, dan 6, sedang dalam keadaan lainnya, rangkaian itu terbuka. Telitilah lintasan arus dalam masing-masing jaringan tertutup itu.

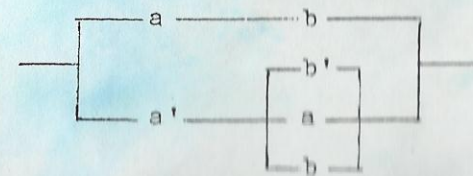
Berikut ini diberikan gambar rangkaian listrik beserta simbolisme logika yang bersesuaian dengannya.

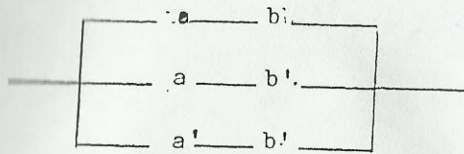
a) b) c)

a) x & (y v x') & z c) (((x v y) & z) v x') & y

b) (x & (z v y')) v (y & z')

Selanjutnya untuk menyelidiki nilai listriknya dapat dibuat tabel nilai masing-masing jaringan.

Sebaliknya rangkaian listrik yang dinyatakan dengan simbol logika, dapat pula digambarkan. Perhatikanlah contoh berikut.

a) (a & b) v (a' & (b' v a v b))

b) (a v b) & c & (a' v b' v c')

lain. Susunlah suatu rangkaian listrik yang lebih sederhana dari diagram di bawah ini.

an di atas dapat ditulis sebagai :

v (a & b') v (a' & b')

nya bentuk ini disederhanakan :

v (a & b') v (a' & b'' ⟺ (a & (b v b')) v (a' & b')

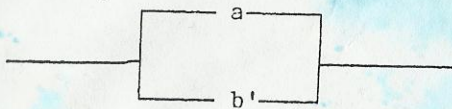
⟺ (a & 1) v (a' & b')

⟺ (a v (a' & b')

⟺ (a v a') & (a v b')

⟺ 1 & (a v b')

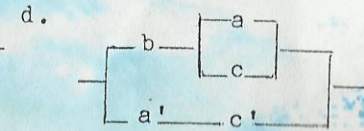
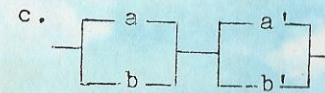
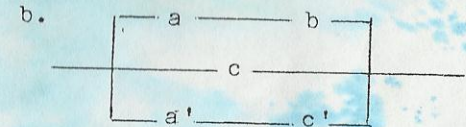
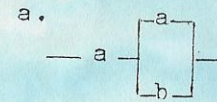
⟺ a v b'

ngkaian di bawah ini ekuivalen dengan rangkaian di

LATIHAN

1. Buktikanlah Teorema Aljabar Bool Abstrak B1 - B6 dengan menggunakan aksioma 1 - 4.
2. Bentukla rangkaian listrik yang bersesuaian dengan bentuk-bentuk berikut.

   a. (x & y) v (x' & (y' v x v y))

   b. (x v y) & z & (x' v y' v z')

   Buatlah tabel nilai masing-masing.
3. Bentuklah simbolisme logika untuk rangkaian-rangkaian berikut.

4. Sederhanakanlah rangkaian listrik berikut dan buatlah diagram masing-masing beserta rangkaian yang disederhanakan.

   a. (x & y) v (x & y')

   b. (x v y) & (x v y')